

УДК 531.51;620.1

А. И. Бохонский¹, д-р техн. наук, проф., **Н. И. Варминская**² канд. техн. наук¹ СевГУ, г. Севастополь, Россия;² ЧВВМУ имени П.С. Нахимова, г. Севастополь, РоссияE-mail: bohon.alex@mail.ru; nvarminska@gmail.com

ДВА ТИПА КОНСТРУИРУЕМЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ УПРУГИХ ОБЪЕКТОВ

Дан краткий обзор классических методов теории оптимального управления поступательным движением упругих объектов с использованием алгоритма решения полной обратной задачи вариационного исчисления. Проектирование иллюстрируется на примере двух типов управления - гармонической функции поступательного ускорения (управления) и полинома. Численные примеры иллюстрируют достижение абсолютного покоя упругого объекта в конечном состоянии.

Ключевые слова: упругий объект, проектирование оптимальных управлений, вариационное исчисление, обратные задачи, поступательные и относительные движения, динамика упругой системы, конечное состояние.

A. I. Bohonsky, N. I. Varminskaya

TWO TYPES OF OPTIMAL MOVEMENTS OF ELASTIC OBJECTS BEING CONSTRUCTED

A brief overview of the classical methods of the optimal control theory of the translational motion of elastic objects using an algorithm for solving the complete inverse problem of the calculus of variations is given. The designing is illustrated using two types of control – a harmonic translational acceleration function (control) and a polynomial. Numerical examples illustrate the achievement of absolute rest of an elastic object in its final state.

Keywords: elastic object, designing of optimal controls, calculus of variations, reverse tasks, translational and relative motions, elastic system dynamics, final state.

Общая постановка задач оптимального управления с обоснованием критериев оптимальности и ограничений дана, например, в [1, 2, 3]. В [3] содержится предупреждение: «Если же по физическим соображениям убедительно сформулировать критерий оптимальности не удастся, то целесообразность постановки оптимальной задачи становится более чем сомнительной».

Отметим, что на практике приоритетной является сама цель управления, критериям оптимальности сопутствуют не строгие рассуждения, а их класс весьма ограничен.

Методам управления динамическими колебательными системами с приложениями к различным объектам техники посвящены работы [4-7]. С использованием приближенных методов оптимального управления преодолены трудности моделирования оптимальных колебательных систем грузоподъемных машин и управляемой амортизации роторов [4].

Основам теории оптимального управления посвящена известная работа коллектива авторов [1], в которой дано всестороннее обоснование принципа максимума Понтрягина, и показана область его эффективного применения. Рассмотрены не только математические особенности применения принципа максимума, но и постановки новых оригинальных задач оптимального управления.

Оптимальным колебательным процессам механических систем посвящена монография [6], в которой представлен широкий круг задач с учетом ряда свойств

упругих механических систем – от оптимизации динамических воздействий до поиска форм колеблющихся тел.

Многие задачи управления решены классическими методами вариационного исчисления, например, при поиске оптимальных управлений вибрационными системами. Однако, даже с весьма упрощенной моделью объекта управление усложняется при его практической реализации.

В [8] найдено и исследовано управление (переносное ускорение) упругого объекта при его быстром перемещении из исходного в конечное состояние абсолютного покоя. Аналитическая функция ускорения в виде синуса в нечетной степени исключает колебания упругого объекта при достижении цели движения. Результаты исследований можно использовать, например, при управлении вращением космического объекта с условием исключения колебаний солнечных батарей (в конечном состоянии).

В [9] исследовано управление переносным движением упругих объектов с использованием импульсов ускорений. Обращено внимание на возможность применения таких управлений для оптимального движения крупногабаритных нежестких конструкций в состоянии невесомости.

Синтезу новых оптимальных управляемых переносных движений упругих систем посвящены работы [10, 11], в которых уделено внимание не только совершенствованию алгоритма реверсионного конструирования управлений, но и техническим приложениям результатов. Обобщение результатов конструирования управлений с использованием алгоритмов решения полной обратной задачи вариационного исчисления (от исходной функции как решения уравнения Эйлера до восстановления функционала-критерия) привело к формулированию реверсионного принципа оптимальности (РПО), отражающего существование экстремума функционала-критерия в пределах возможного минимального времени, определяемого из моментных соотношений в относительном движении.

Результаты моделирования динамического поведения упругих объектов при использовании управлений, найденных согласно РПО, отражены в монографии [12].

В учебном пособии [14] «Механика управляемого движения объектов» показано существование широкого класса кососимметричных оптимальных управлений переносным движением объектов техники, полученных с помощью алгоритмов решения полных обратных задач вариационного исчисления.

Полученные результаты исследований нуждаются в систематизации и обобщениях при переходе к рекомендациям по их практическому использованию.

Анализ динамического поведения упругого объекта с одной степенью свободы приведен на характерном примере переносного оптимального движения с двумя типами кососимметричных управлений.

Пример 1

Используется управление (ускорение), известное из решения задачи вариационным методом при перемещении объекта как абсолютно твердого тела. В этом случае ускорение, скорость и перемещение:

$$U(t) = \frac{6L(T-2t)}{T^3}, \quad V(t) = \frac{6Lt(T-t)}{T^3}, \quad S(t) = \frac{Lt^2(3T-2t)}{T^3}, \quad (1)$$

где: L – общее перемещение объекта; время T – находится из моментных соотношений в относительном движении. В относительном движении колебания упругого объекта описываются уравнением:

$$\ddot{x} + k^2 x = -U(t), \tag{2}$$

решение которого при нулевых начальных условиях:

$$x(t) = \frac{6L}{k^2 T^2} \left(\cos kt - \frac{1}{kT} \sin kt - (T - 2t) \right).$$

Скорость $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, ускорение $a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$.

Моментные соотношения ($x(T) = 0, \dot{x}(T) = 0$) записаны для случая $k = \pi \text{ с}^{-1}$:

$$2 \sin(\pi T) - \cos(\pi T)\pi T - \pi T = 0, \quad 2 \cos(\pi T) + \sin(\pi T)\pi T - 2 = 0.$$

Один из общих корней, отличный от нуля, системы трансцендентных уравнений найден графически в интервале $2,86060 > T > 2,86058$. Графики поиска корня приведены на рисунке 1.

Графики переносного и относительного движения для $T = 2,8606 \text{ с}, L = 1 \text{ м}$, изображенные на рисунках 2, 3, свидетельствуют, что после перемещения на расстояние L наступает абсолютный покой. Графики абсолютного движения изображены на рисунке 4.

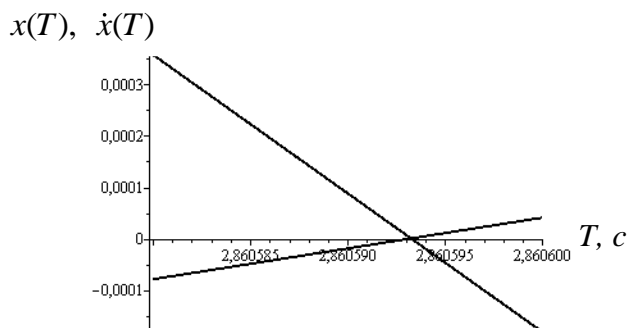


Рисунок 1. Графическое решение системы трансцендентных уравнений

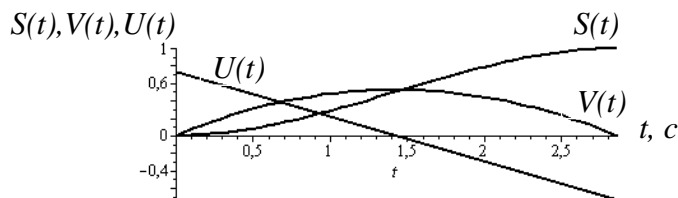


Рисунок 2. Управление в виде полинома (переносное движение)

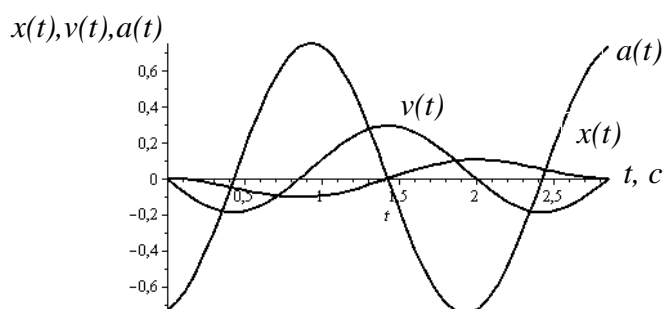


Рисунок 3. Колебания упругой системы (относительное движение)

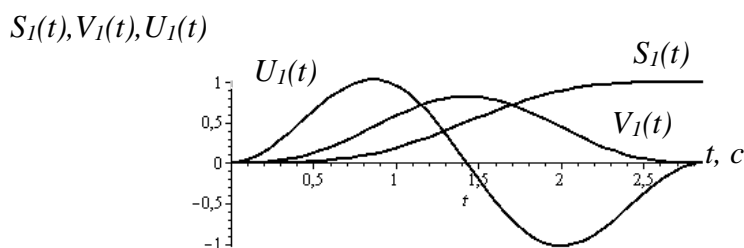


Рисунок 4. Абсолютное движение (переносное и относительное движения)

Действие (по Лагранжу) $J_1 = \int_0^T V^2 dt = 0,4195$; а относительном движении $J_2 = \int_0^T \dot{x}^2 dt = 0,0779$, т.е. $J_1/J_2 = 5,3843$.

Пример 2

Как было показано в работе [9], переносное управление (ускорение) возможно в наиболее простом виде:

$$U(t) = \frac{Lp^2}{2\pi} \sin(pt), \tag{3}$$

где L – расстояние, на которое перемещается объект за время $T = 2\pi/p$, $p = \text{const}$.

Частота p выбирается в зависимости от частоты k собственных колебаний упругого объекта: $p = k/n$; $n = 2,3,4,\dots$. В общем случае управление – функция в нечетной степени, т.е.

$$U(t) = \frac{2\pi L}{T^2} \sin^{2n_1-1} \left(\frac{k}{n} t \right),$$

где $n_1 = 1,2,3,4,\dots$. Простой случай – при $n_1 = 1$, $p = 2\pi/T$.

При использовании переносного ускорения период собственных колебаний и общее время движения зависимы. Особенности динамического поведения упругого осциллятора иллюстрируются на примере.

Переносное ускорение (управление) при $m = 1$ кг далее принимается в виде:

$$U(t) = a \sin(pt), \tag{4}$$

где $a = \text{const}$; $p = 2\pi/T$; T – общее время движения. С учетом краевых условий:

$$S(0) = 0, \quad S(T) = L, \quad \dot{S}(T) = V(T) = 0,$$

где L – перемещение за время $t = T$, получено (рисунок 5):

$$U(t) = \frac{2\pi L}{T^2} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \quad V(t) = \frac{L}{T} - \frac{L}{T} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \quad S(t) = \frac{Lt}{T} - \frac{L}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right). \tag{5}$$

Дифференциальное уравнение, описывающее колебания упругого осциллятора в относительном движении без учета сопротивления, имеет вид (1). С учетом начальных условий $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ (движение из состояния относительного покоя) перемещение

$$x(t) = \frac{2\pi L}{T^2 k^2 - 4\pi^2} \left(\frac{2\pi}{Tk} \sin(kt) - \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right), \quad v(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \quad a(t) = \frac{dv(t)}{dt}. \tag{6}$$

Определение общего времени движения T иллюстрируется на примере при $k = \pi \text{ с}^{-1}$ и периодом собственных колебаний $T_l = 2\pi/k = 2 \text{ с}$; $L = 1 \text{ м}$.

При $t = T$ для системы трансцендентных уравнений ($x(T) = 0$, $\dot{x}(T) = 0$) общий корень $T = 4 \text{ с}$. Графики переносного движения $S(t), V(t), U(t)$ изображены на рисунке 5, а относительного движения $x(t), v(t), a(t)$ – на рисунке 6. Из графиков следует, что в момент времени $t = T$ достигается абсолютный покой.

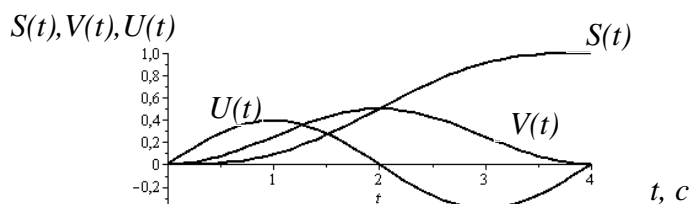


Рисунок 5. Синусоидальное управление (переносное движение)

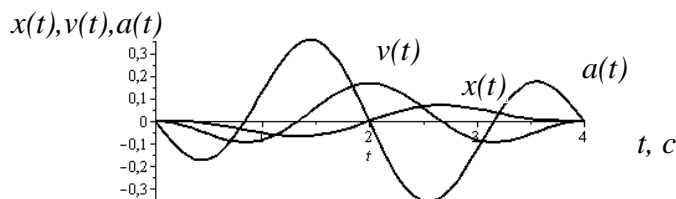


Рисунок 6. Относительное движение (колебания объекта)

В абсолютном движении (по отношению к неподвижной системе координат) графики функций $\ddot{x}(t) = U(t) - a(t)$, $\dot{x}(t) = V(t) - \dot{x}(t)$, $x(t) = S(t) - x(t)$ изображены на

рисунке 7. Для сравнения переносного и относительного движений вычислены действия (по Лагранжу): $J_1 = \int_0^T V^2 dt = 0,375$, $J_2 = \int_0^T \dot{x}^2 dt = 0,0277$, т.е. действие переносного движения в 13,5 раз больше действия относительного движения.

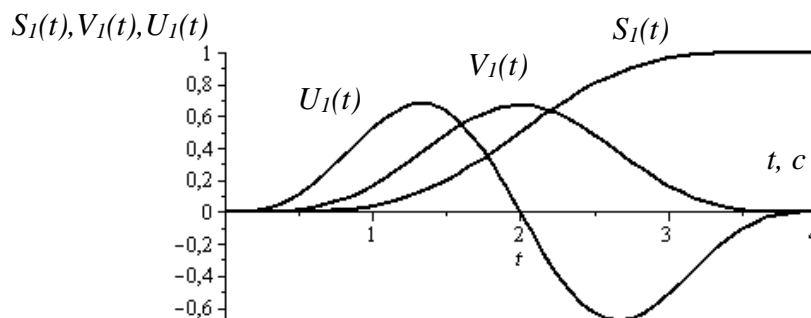


Рисунок 7. Абсолютное движение (по отношению к неподвижной системе координат)

Эксперименты и обобщения результатов реверсионного конструирования (с использованием Maple) привели к универсальным аналитическим зависимостям для перемещения, скорости и ускорения для полинома ускорения (управления) степени n :

$$S(t) = \frac{L}{2T(n+2)} \left(T^{-n-1} (T-2t)^{n+2} + 2nt + 4t - T \right), \tag{7}$$

$$V(t) = \frac{dS(t)}{dt}, \quad U(t) = \frac{dV(t)}{dt} = \frac{2L(n+2)}{T^{n+2}} (T-2t)^n,$$

где n – нечетная степень полинома ($n = 1, 3, 5, 7, \dots$). Если $n = 1$, то из (2) ускорение $U(t) = \frac{6L(T-2t)}{T^3}$, что соответствует классическому управлению, полученному вариационным методом (при использовании критерия оптимальности $\int_0^T U^2 dt$).

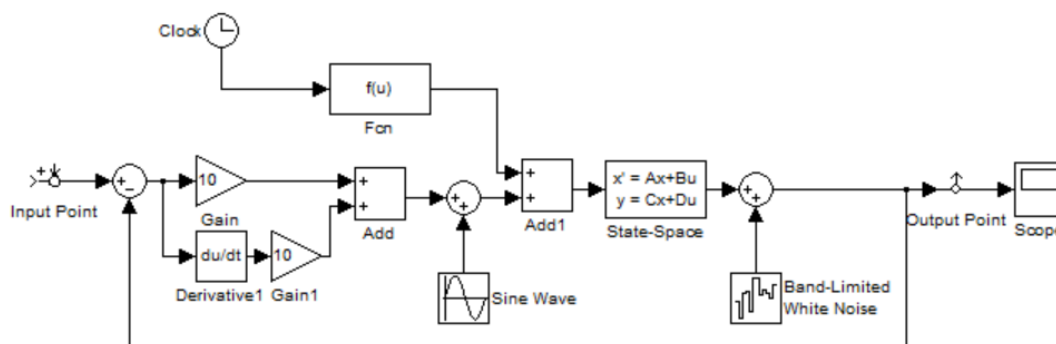


Рисунок 8. Графическая модель комбинированного управления (вариант 1)

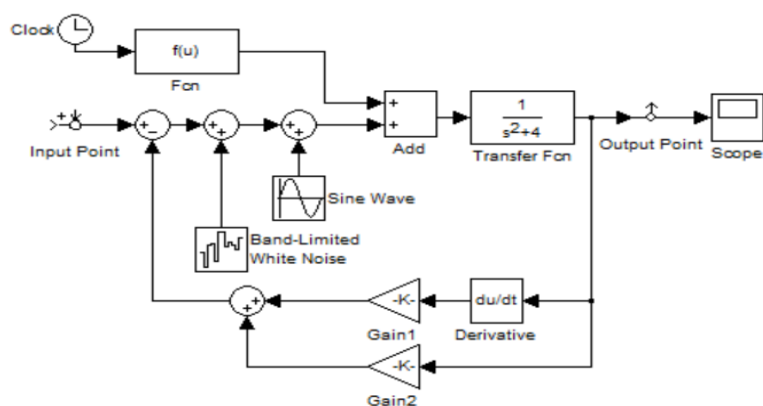


Рисунок 9. Графическая модель комбинированного управления (вариант 2)

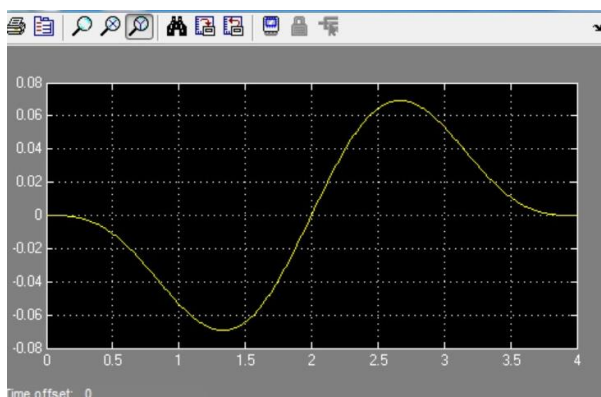


Рисунок 10. Относительное движение (колебания без учета сопротивления)

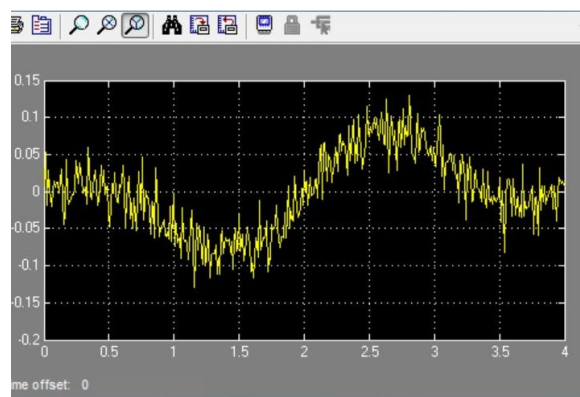


Рисунок 11. Относительное движение (колебания с учетом помех)

На рисунках 8 – 11 изображены модели комбинированного управления (оптимального программного поступательного с учетом обратной связи) и графики колебаний упругой системы в относительном движении. Использование обратной связи приводит к снижению уровня случайных колебаний на временном интервале оптимального движения.

Заключение

Оба типа управления позволяют в фиксированный момент времени, определяемый как один из общих корней моментных соотношений, достичь абсолютного либо относительного покоя упругого объекта.

Первый тип управления «разгон-торможение», основанный на использовании полиномов ускорения (или перемещения) позволяет не только достичь состояния относительного либо абсолютного покоя, но и существенно сэкономить энергию для достижения поставленной цели движения.

Оба типа конструируемых таким образом управлений могут применяться только для разгона или только для торможения с достижением состояния абсолютного либо относительного покоя.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Понтрягин, Л. С. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе. – М.: Наука, 1983. – 391 с.
2. Красовский Н. Н. Теория управления движением / Н.Н. Красовский. – М.: Наука, 1968. – 476 с.
3. Теория автоматического управления. Ч. II. Теория нелинейных специальных систем автоматического управления / Под ред. А. А. Воронова. – М.: Высш. шк., 1997. – 288 с.
4. Черноусько, Ф. Л. Управление колебаниями / Ф. Л. Черноусько, П. Д. Акуленко, Б. Н. Соколов. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
5. Гуляев В. И. Оптимальное управление движением механических систем / В. И. Гуляев, В. А. Баженов, В. П. Кошкин. – К.: УМК ВО, 1988. – 235 с.
6. Троицкий, В. А, Оптимальные процессы колебаний механических систем / В. А. Троицкий. – Л.: Машиностроение, 1976. – 248 с.
7. Крутько, П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: линейные модели / П. Д. Крутько. – М.: Наука, 1988. – 326 с.
8. Бохонский, А. И. Управление переносным движением упругих систем / А. И. Бохонский // Динамические системы. – Симферополь: КФТ, 2004. – Вып. 18. – С. 56 – 63.
9. Бохонский, А. И. Оптимальное переносное движение упругих объектов / А. И. Бохонский, Н. И. Варминская // Динамические системы. – Симферополь: ТНУ, 2005. – Вып. 19. – С. 3 – 10.
10. Бохонский, А. И. Оптимальное управление переносным движением деформируемых объектов: теория и технические приложения / А. И. Бохонский, Н. И. Варминская, М. И. Мозолевский. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2007. – 296 с.
11. Бохонский, А. И., Варминская Н. И. Вариационное и реверсионное исчисления в механике: монография / А. И. Бохонский, Н. И. Варминская. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2012. – 212 с.
12. Бохонский, А. И. Реверсионный принцип оптимальности / А. И. Бохонский. – М.: Вузовский учебник: ИНФРА-М, 2016. – 174 с.
13. Бохонский, А. И., Варминская Н. И. Конструирование оптимальных управлений перемещением упругих объектов / А. И. Бохонский, Н. И. Варминская. – Санкт-Петербург: НИЦ МС, 2020. – 120 с.
14. Бохонский, А. И. Механика управляемого движения объектов / А. И. Бохонский, Н. И. Варминская, Т. В. Мозолевская. – М.: ИНФРА-М, 2021.–170 с.
15. Bokhonsky, A. I. Modelling and analysis of elastic system in motion / A. I. Bokhonsky, S. Y. Zolkiewski. – Gliwice: Wydawnictwo Politechniki, 2011. – 171p.

Поступила в редколлегию 02.02.2024 г.