

А. И. Бохонский, д-р техн. наук, проф.,
Т. В. Мозолева, канд. техн. наук., доц., **А. И. Рыжков**, аспирант
 Севастопольский государственный университет, Россия
 Тел./Факс: +7 (978) 052-95-92; E-mail: bohon.alex@mail.ru

РЕЛЕЙНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КАК АНАЛОГ СУХОГО ТРЕНИЯ

Дан сравнительный анализ динамического поведения упругой системы при релейном оптимальном управлении, найденном с использованием ПМП, с аналогом системы с эквивалентным сухим трением, фактически в данном случае выполняющим роль релейного управления.

Ключевые слова: оптимальное управление, релейное управление, упругая система, сухое трение, принцип максимума Понтрягина, синтез.

A. I. Bokhonsky, T. V. Mozolevskaya, A. I. Ryzhkov

RELAY OPTIMAL CONTROL AS THE DRY FRICTION ANALOG

A comparative analysis of the dynamic behavior of elastic system with optimal control relay, found using PMP with equivalent analogue systems with dry friction, in fact, in this case, the role of the relay control.

Key words: optimal control, relay control, elastic system, dry friction, Portnyagin's principle of maximum, synthesis.

1. Введение

На примере упругой системы с сухим трением проведена аналогия с оптимальным релейным управлением движением системы.

В 2013 г. появилась статья Р.В. Гамкрелидзе "Открытие Принципа Максимума Понтрягина (ПМП)", которая отразила содержание доклада автора на семинаре Тулонского университета (Франция) [1]. В статье освещена предыстория открытия ПМП, подведен итог шестидесятилетнего развития и становления метода, отмечена эффективность приложений (особенно в случае ограничений на управляющие воздействия) при решении огромного количества актуальных задач современной техники.

В монографиях [2,3], научной и учебной литературе [4,5] приведены примеры решения задач, иллюстрирующих применение принципа максимума.

Особенности использования принципа максимума можно увидеть на простом примере с одной степенью свободы [4]. Для объекта с уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = u(t) \quad (1)$$

необходимо найти управление

$|u(t)| \leq 1$, обеспечивающее перемещение за минимальное время

$$I = \int_0^T dt = \min$$

из исходного $(x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0)$ в конечное состояние покоя $(x(T) = 0, \dot{x}(T) = 0)$.

Уравнение (1) преобразуется к виду

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + u(t) \quad (2)$$

Для системы (2) Гамильтониан

$$H = \psi_0 \cdot 1 + \psi_1 x_2 - \psi_2 x_1 + \psi_2 u(t) \quad (3)$$

в случае

$$u(t) = 1 \cdot \text{sign } \psi_2(t) \quad (4)$$

достигает максимума. Из канонических уравнений

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \psi_2, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1 \quad (5)$$

следует

$$\psi_2 = D \cdot \sin(t + \alpha), \quad \text{т.е.} \quad u(t) = 1 \cdot \text{sign} (\sin(t + \alpha)) \quad (6)$$

2. Основное содержание и результаты работы

Константа α в (6) находится в результате дополнительного анализа поведения объекта (Рис. 1) в управляемом движении.

При определении $\psi(0)$, как известно, используется итерационная процедура, сходимость которой зависит от выбора начальных приближений.

Целью данной статьи являются сравнительный анализ динамического поведения упругой системы при релейном оптимальном управлении, найденном с использованием ПМП, с аналогом системы с эквивалентным сухим трением, фактически в данном случае выполняющим роль релейного управления.

Численный эксперимент осуществлялся с использованием известных пакетов прикладных программ. Результаты получены при различных начальных условиях и соответствующих им управлениях. Ниже приведены примеры численного интегрирования уравнений движения с использованием управлений, найденных согласно ПМП, и сухого трения.

Из результатов численных экспериментов видны характерные закономерности поведения системы.

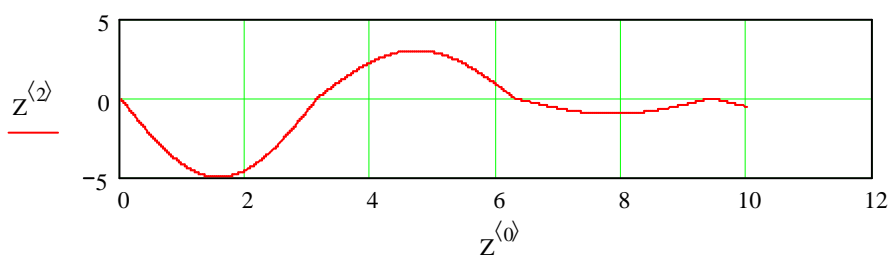
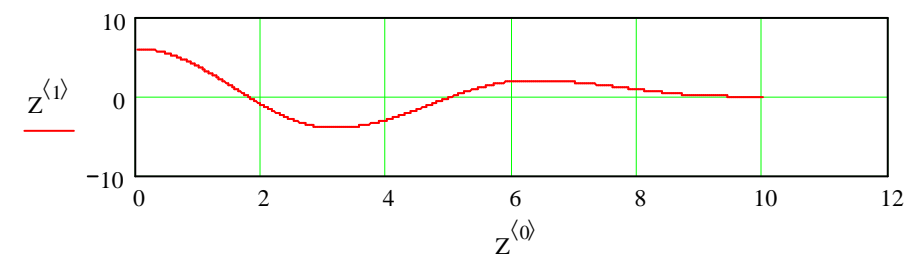
Если $x(0) \neq 0$, а $\dot{x}(0) = 0$, то при $u(t) = 1 \cdot \text{sign}(\dot{x})$ и $u(t) = 1 \cdot \text{sign}(\sin(t - \pi))$ поведение системы одинаково и достигается покой ($x(T) = 0, \dot{x}(T) = 0$) за одно и тоже минимальное время.

Если $x(0) = 0$, а $\dot{x}(0) \neq 0$, то при $u(t) = 1 \cdot \text{sign}(\dot{x})$ и $u(t) = 1 \cdot \text{sign}(\sin(t - \pi))$ поведение системы одинаково, покой наступает за одинаковое минимальное время.

Если же $x(0) \neq 0$, и $\dot{x}(0) \neq 0$, то для достижения состояния покоя применима алгебраическая сумма управлений, т.е. $u(t) = 1 \cdot \text{sign}(\cos(t - \pi)) - 1 \cdot \text{sign}(\sin(t - \pi))$. Если в этом случае принять только $u(t) = D \cdot \text{sign}(\dot{x})$, то для приведения системы в состояние покоя за минимальное время необходимо чтобы $D > 1$.

Пример 1. $x(0) = 6m$, а $\dot{x}(0) = 0$. Управление $1 \cdot \text{sign}(\sin(t - \pi))$

$$x := \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(t, x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_0 - \text{sign}(\sin(t - \pi)) \end{pmatrix} \quad Z := \text{rkfixed}(x, 0, 10, 2000, D)$$



$$x := \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(t, x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_0 - \text{sign}(x_1) \end{pmatrix} \quad Z := \text{rkfixed}(x, 0, 10, 2000, D)$$

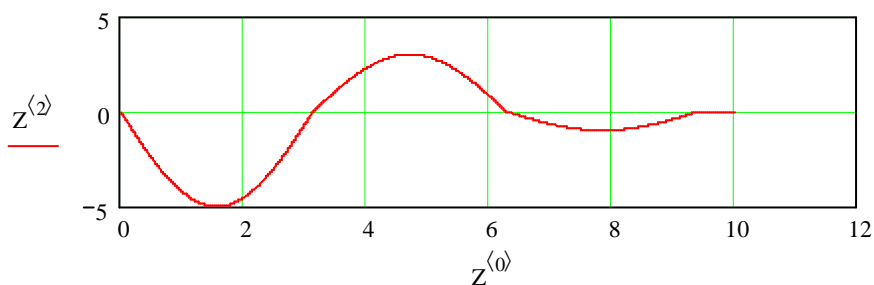
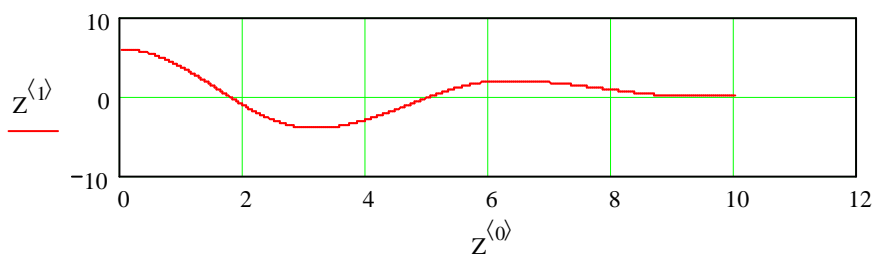


Рис. 1. – Схема упругой системы с одной степенью свободы.
 Для уменьшения времени достижения конечного состояния покоя во всех случаях необходимо увеличивать $|D|$. Естественно, что при достижении цели движения (покоя) во всех случаях релейное управление отключается.

Вид функции $\psi_2(t)$ зависит от начальных условий. В данном примере $\psi_2(0) = 0$ и $\frac{d\psi_2}{dt}(0) = 1$. Применение ПМП позволяет выявить класс управлений для достижения цели движения при заданных начальных условиях.

График, изображённый на рис. 2, получен экспериментально при варьировании $|D|$.

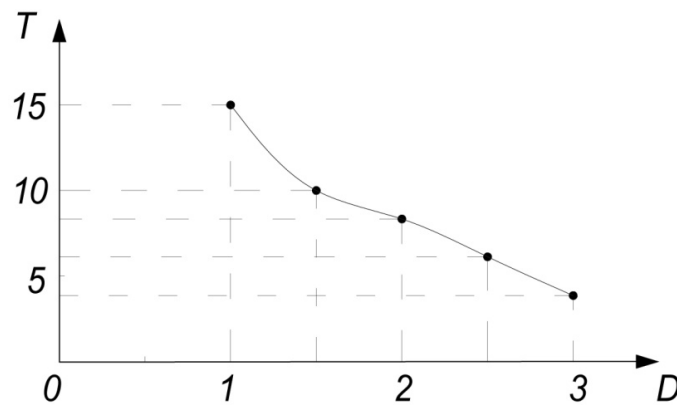


Рис. 2. – График зависимости времени движения до остановки ($x(T) \approx 0, \dot{x}(T) \approx 0$) от предельного значения управления $|D|$.

С ростом D время достижения состояния покоя уменьшается экспоненциально. Экспериментально предоставляется возможность найти физически реализуемое минимально возможное время движения для достижения состояния $x(T) = 0, \dot{x}(T) = 0$.

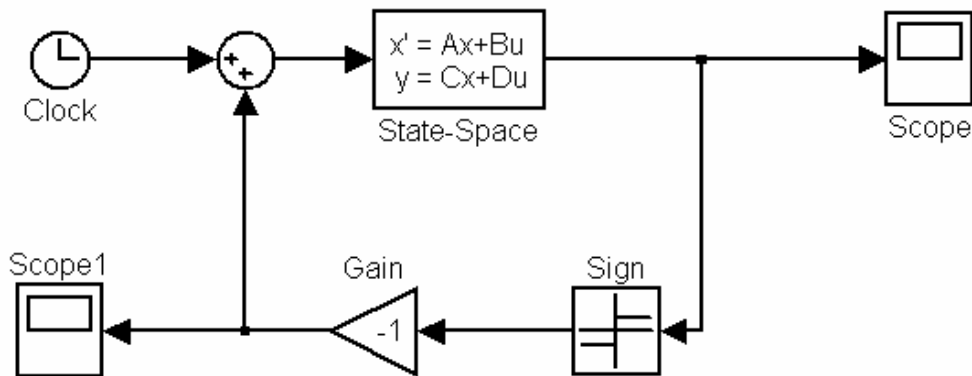


Рис. 3. –Схема SIMULINK- модели объекта с обратной связью.

На рис. 3 изображена схема (в Simulink) для реализации управления $u(t) = 1 \cdot \text{sign}(\dot{x})$ в виде обратной связи. Дополнительно экспериментально подтверждено аналогичное поведение системы при выполненных ранее экспериментах в Mathcad. Схема упругой системы с двумя системами свободы изображена на рис. 4. Уравнения движения системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + (C_1 + C_2)x_1 - C_2 x_2 = U_2(t) \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + C_2 x_2 = C_2 x_1 = U_2(t), \end{array} \right. \quad (7)$$

где $U_1 = -F_1 \text{sign } \dot{x}_1$, $U_2 = -F_2 \text{sign } \dot{x}_2$. Для численного интегрирования Mathcad использованы переменные: x_0, x_1, x_2, x_3 .

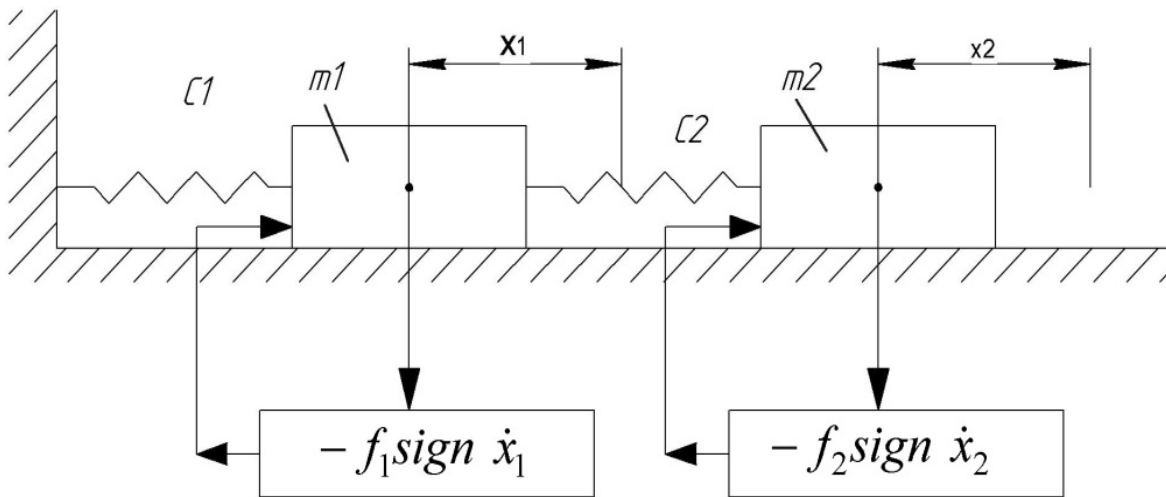


Рис. 4. –Схема системы с двумя степенями свободы с управлением колебаниями, которое аналогично сухому трению

Система уравнений (7) в новых переменных преобразуется к виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_0}{dt} = x_1 \\ \frac{dx_1}{dt} = -\frac{(C_1 + C_2)}{m_1} \cdot x_0 + \frac{C_2}{m_1} x_2 - f_1 \text{sign}(x_1) \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = +\frac{C_2}{m_2} \cdot x_0 - \frac{C_2}{m_2} x_2 - f_2 \text{sign}(x_3) \end{array} \right. \quad (8)$$

При использовании процедуры `rkfixed` для выдачи результатов на печать использованы обозначения: $z^{<0>} = t$, $z^{<1>} = x_0$, $z^{<2>} = \dot{x}_0$, $z^{<3>} = x_2$, $z^{<4>} = \dot{x}_2$.

Пример 2. Система с двумя степенями свободы.

$$m_1 := 40 \quad m_2 := 10 \quad C_1 := 2000 \quad C_2 := 1000$$

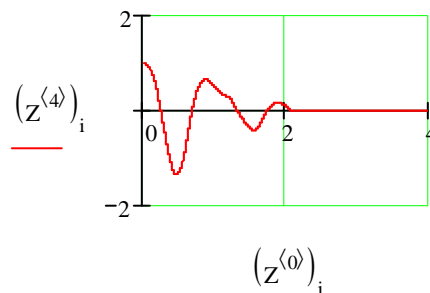
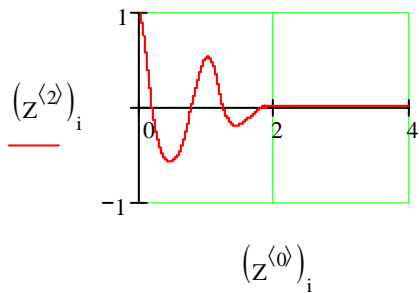
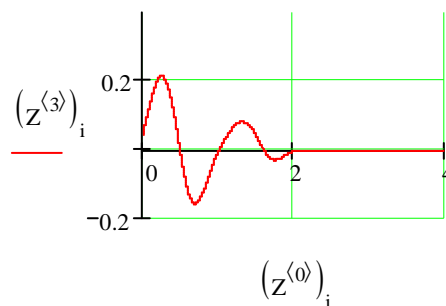
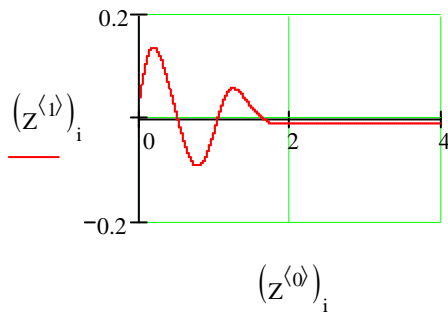
$$x := \begin{pmatrix} 0.04 \\ 1 \\ 0.04 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 := 0.85 \quad f_2 := 0.85$$

$$D(t, x) := \begin{bmatrix} x_1 \\ -(C_1 + C_2) \cdot \frac{x_0}{m_1} + C_2 \cdot \frac{x_2}{m_1} - f_1 \cdot \text{signum}(x_1) \\ x_3 \\ C_2 \cdot \frac{x_0}{m_2} - C_2 \cdot \frac{x_2}{m_2} - f_2 \cdot \text{signum}(x_3) \end{bmatrix}$$

$$Z := \text{rkfixed}(x, 0, 4, 10000, D)$$

$$i := 0.. \text{rows}(Z) - 1$$



Исходные данные: $m_1 = 40$ кг; $m_2 = 10$ кг; $C_1 = 2000$ Н/м; $C_2 = 1000$ Н/м. Частоты собственных колебаний упругой системы: $\omega_1 = 5,997$ с⁻¹; $\omega_2 = 11,792$ с⁻¹. В численном эксперименте варьировались начальные условия и значения сопротивлений $|f_1|, |f_2|$.

Пример 1. При $x_1(0) = x_2(0) = 0,04$ м, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ м/с и $|f_1| = |f_2| = 0,2$ система приводится в состояние покоя за 2 с.

Пример 2. При $x_1(0) = x_2(0) = 0,04$ м, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 1$ м/с и $|f_1| = |f_2| = 0,85$ система также приводится в состояние покоя за 2 с.

Пример 3. При за $x_1(0) = 0,04$ м, $x_2(0) = -0,04$ м, $\dot{x}_1(0) = -1$ м/с, $\dot{x}_2(0) = 1$ м/с, $|f_1| = 0,2$, $|f_2| = 1,2$ система приводится в состоянии покоя за 2 с.

Заключение

1. Показано, что в рассмотренных задачах релейному управлению, найденному для упругой системы с одной степенью свободы с привлечением ПМП, аналогом является сухое трение. При этом исключается процедура поиска начальных значений $\psi(0)$.

Приближения в виде многократного численного интегрирования исходной системы нелинейных уравнений с сухим трением позволяет с достаточной для практики точностью найти требуемые управления для достижения цели движения.

2. При оптимальном по быстродействию перемещении упругой системы общее время движения может быть найдено из моментных соотношений [6-8], а затем уточнено в результате численного эксперимента.

3. Пример управляемого поведения системы с двумя степенями свободы иллюстрирует приведение системы за найденное минимальное время в состоянии покоя. Рассмотренный подход, основанный на уточнении характера уравнений в результате последовательных приближений (при многократном численном интегрировании системы уравнений), распространяется на системы с конечным числом степеней свободы.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Гамкрелидзе Р. В. Открытие принципа Максимумы Понтрягина (ПМП). Математический ин-т В. А. Стеклова РАН. gam@IDSUN.ras.ru. 2013. – 13 с.
2. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Р. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1969. – 384 с.
3. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1969. – 408 с.
4. Теория автоматического управления ч. II. Под Ред. А.В. Нетушила. М., Высш. школа, 1972. – 432 с.
5. Теория автоматического управления. Ч. II. Теория линейных и специальных систем автоматического управления. Под ред. А. А. Воронова. – М., Высш. школа, 1977. – 288 с.
6. Бохонский А. И., Варминская Н. И., Мозолевский М. И. Оптимальное управление переносным движением деформируемых объектов: теория и технические приложения. – Севастополь, СевНТУ, 2007. – 296 с.
7. Бохонский А. И. Вариационное и реверсионное исчисление в механике: монография / А. И. Бохонский, Н. И. Варминская. Под общ. ред. А. И. Бохонского. – Севастополь, СевНТУ, 2012. – 212 с.
8. Bokhonsky A. I. Modeling and analysis of elastic systems in motion / A. I. Bokhonsky, S. I. Zolkiewski. Monografia. – Gliwice: Wydawnictwo politechniki, 2011. – 172 p.

Поступила в редколлегию 12.01.2016 г.