

УДК 621,9

В.П. Радин, В.Н. Щугорев, А.В. Щугорев, Ж.В. Зайкина
 НИУ «МЭИ», г. Москва, Россия
 E-mail: Shchugorev.VN@gmail.com

УСТОЙЧИВОСТЬ ПАНЕЛИ НА УПРУГОМ ОСНОВИИИИ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

Критические значения параметров неконсервативных нагрузок в задачах упругой устойчивости определяются соотношениями между частотами, определяющими динамический тип потери устойчивости [1]. Яркой иллюстрацией этой особенности является известный парадокс Николаи, обнаруженный еще в 30-е годы прошлого столетия. Рассматривается задача об устойчивости плоской панели, связанной с упругим основанием и находящейся в сверхзвуковом потоке газа. Упругое основание, рассматриваемое как винклеровское, может моделировать систему каких-либо подкрепляющих элементов, "размазанную" для упрощения расчетов по всей или части поверхности панели

Ключевые слова: Устойчивость плоской панели, упругое основание, сверхзвуковой поток газа

V.P. Radin, V.N. Shchugorev, A.V. Shchugorev, J.V. Zaykin

SUSTAINABILITY PANEL ON THE ELASTIC FOUNDATION IN SUPERSONIC GAS

FLOW

: Critical loads of non-conservative parameter values in the tasks determined by the relations among stability of elastic frequencies defining dynamic buckling type [1]. A vivid illustration of this feature is a famous paradox Nicolai found still in the 30-ies of the last century. The problem of stability of a flat panel that is associated with the elastic base and supersonic gas flow. Elastic base, seen as the Winkler, can simulate any system supporting elements "smudged" to simplify calculations for all or part of the surface

Keywords: sustainability, flat panel elastic Foundation, supersonic gas flow

В настоящей работе рассматривается задача об устойчивости плоской панели, связанной с упругим основанием и находящейся в сверхзвуковом потоке газа. При больших сверхзвуковых скоростях возмущенное давление p на панель можно определить по приближенной формуле [5]

$$p = p_0 + \rho_\infty v \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (1)$$

где p_0 – невозмущенное давление, ρ_∞ – плотность газа, U – скорость набегающего потока, v – скорость звука. Выражение в скобках в правой части (1) представляет собой поперечную составляющую скорости частиц газа, обтекающего колеблющуюся панель. Существуют и более точные приближения, применяемые при числах Маха $M = U / v \geq \sqrt{2}$.

Пусть упругая плоская панель (пластина) толщиной h , шарнирно оперта по сторонам при $x = 0$ и $x = a$, удлинена в направлении, ортогональном потоку. Это позволяет считать, что в пластине реализуется состояние цилиндрического изгиба. Тогда нормальный прогиб в панели $w(x, t)$ можно рассматривать как функцию только координаты x и времени t . Кроме того, панель опирается на некоторую систему подкрепляющих упругих элементов, которая также не нарушает условия реализации цилиндрического изгиба и позволяет трактовать рассматриваемую систему как пластину, связанную с однородным упругим основанием с некоторой приведенной поверхностной же-

сткостью c . Панель находится в сверхзвуковом потоке газа с невозмущенной скоростью U , направленной вдоль оси Ox , и консервативной нагрузки в виде постоянной во времени сжимающего усилия N .

Приняв равными внутреннее и внешнее невозмущенные давления, уравнение колебаний панели запишем в виде

$$D \left(1 + b_i \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho_\infty v U \frac{\partial w}{\partial x} + (\rho_\infty v + \rho h b_e) \frac{\partial w}{\partial t} + cw + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

Здесь D – цилиндрическая жесткость панели, ρh – масса панели, отнесенная к единице площади, b_i – коэффициент вязкоупругости для материала панели с применением модели Фойхта, b_e – коэффициент внешнего рассеяния энергии.

Запишем уравнение (2) в безразмерном виде

$$\frac{1}{\pi^4} \left(1 + \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{\alpha}{\pi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\beta}{2} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \varepsilon_e \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + \frac{\gamma}{\pi^4} w = 0, \quad (3)$$

где введены следующие параметры

$$\alpha = \frac{N}{N_*}, \beta = \frac{2\rho_\infty v U}{\rho h a \omega_0^2}, \omega_0 = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}, \gamma = \frac{c a^4}{D}, \varepsilon_i = b_i \omega_0, \varepsilon_e = \frac{\rho_\infty v}{\rho h \omega_0} + \frac{b_e}{\omega_0}, \tau = \omega_0 t, \xi = \frac{x}{a}, N_* = \frac{\pi^2 D}{a^2} \quad (4)$$

Здесь ω_0 и N_* первая собственная частота и критическое усилие соответственно для шарнирно опертой по кромкам панели без упругого основания при цилиндрическом изгибе. Под $w(\xi, \tau)$ в уравнении (3) понимается нормальный прогиб панели, отнесенный к ее толщине h .

Предполагая в дальнейшем варьирование жесткости упругого основания γ и построение областей устойчивости на плоскости параметров нагружения, проведем исследование статической устойчивости панели при действии только сжимающего усилия N и собственные колебания панели. Решение задачи об устойчивости шарнирно опертого стержня, связанного с упругим основанием изложено в монографии А.С.Вольмира [6]. На рис. 1 в диапазоне $0 \leq \gamma \leq 10000$ приведена зависимость критической силы $\alpha_*(\gamma)$ как функции параметра жесткости упругого основания γ . Зависимость представляет собой кусочно-линейную функцию с точками излома при $\gamma_1 = 390$, где $\alpha_{*1} = 5$, при $\gamma_2 = 3510$, где $\alpha_2 = 13$. На каждом участке проиллюстрированы и формы потери устойчивости. Теперь проведем исследование спектра собственных частот и форм в зависимости от величины жесткости упругого основания γ и при варьировании сжимающего усилия α . Несложные вычисления дают следующее выражение для собственных частот

$$\omega_n = \sqrt{n^4 - \alpha n^2 + \frac{\gamma}{\pi^4}}. \quad (5)$$

Из этой формулы можно получить выражение для сжимающего усилия α , при котором совпадают соседние частоты $\omega_n = \omega_{n+1}$, $\alpha = n^2 + (n+1)^2 = 2n^2 + 2n + 1$

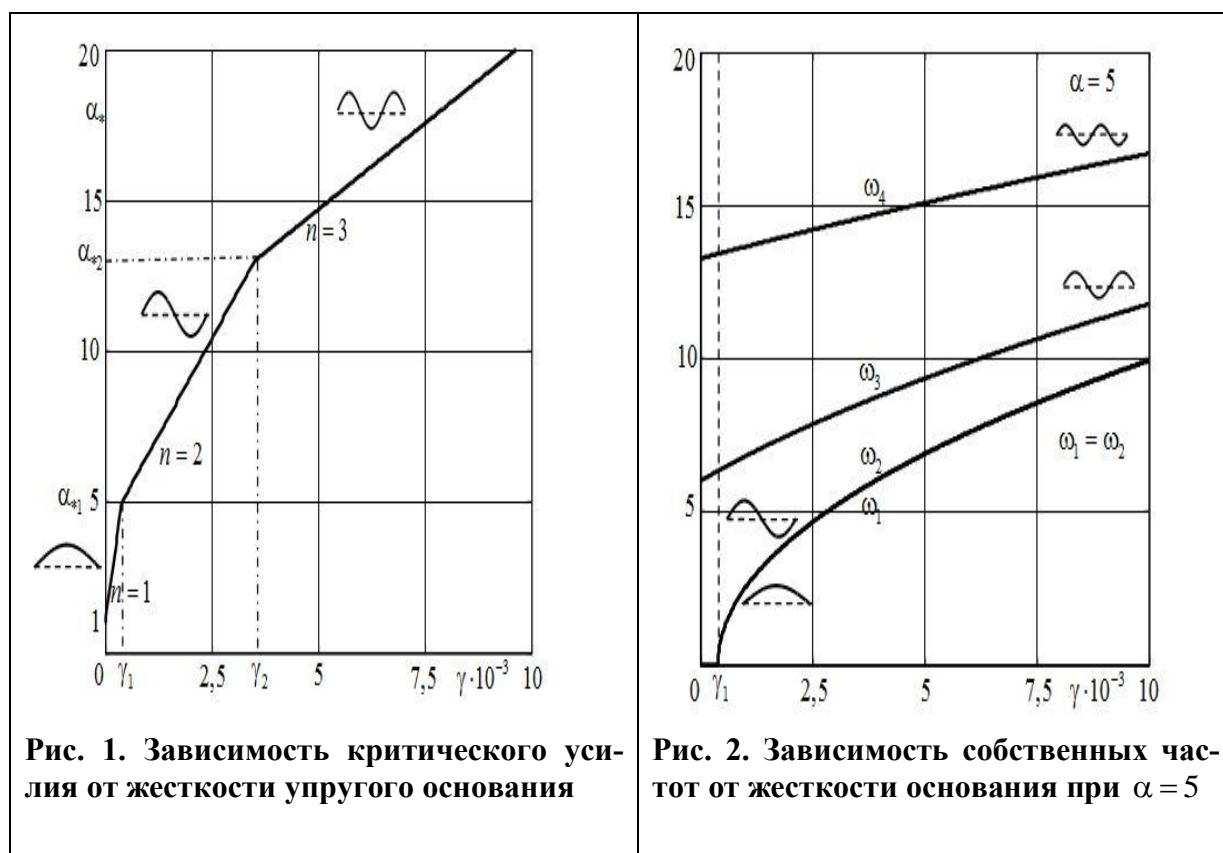
Таким образом, при $\alpha = 5$ совпадают первая и вторая собственные частоты, при $\alpha = 13$ совпадают вторая и третья собственные частоты и т.д. Очевидно, что это свойство является следствием зависимости формы потери устойчивости от жесткости упругого основания и так называемого особого случая, которым называют случай совпадения форм потери устойчивости с формами собственных колебаний. Особенностью системы является также и то, что при соответствующем значении параметра α кратность частот

имеет место при всех возможных значениях жесткости основания. Рис. 2 иллюстрирует зависимость первых собственных частот от жесткости основания. При этом для сжимающего усилия принято $\alpha = 5$, при котором первая и вторая собственные частоты становятся кратными, но соответствующими различным формам колебаний с одной и двумя полуволнами синусоиды.

Исследование устойчивости плоской формы равновесия панели сводится к анализу устойчивости по Ляпунову тривиального решения уравнения (5). Применим для этого метод разложения по собственным формам [1]. Представляя $w(\xi, \tau)$ в виде ряда

по формам собственных колебаний $w(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^n q_k(\tau) \varphi_k(\xi)$, где $q_k(\tau)$ – обобщенные координаты, $\varphi_k(\xi) = \sin(k\pi\xi)$ – формы собственных колебаний панели в состоянии цилиндрического изгиба, n – число удерживаемых членов ряда, и применяя процедуру метода Бубнова-Галеркина, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат $q_k(\tau)$. Матричная форма этих уравнений имеет вид

имеет вид



$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \left(\varepsilon_e \mathbf{A} + \frac{\varepsilon_i}{\pi^4} \mathbf{C} \right) \dot{\mathbf{q}} + \left(\frac{1}{\pi^4} \mathbf{C} + \frac{\alpha}{\pi^2} \mathbf{D} + \frac{\beta}{2} \mathbf{B} + \frac{\gamma}{\pi^4} \mathbf{A} \right) \mathbf{q} = 0, \quad (6)$$

где матрицы $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ и \mathbf{D} определяются через интегралы от форм колебаний и их производных.

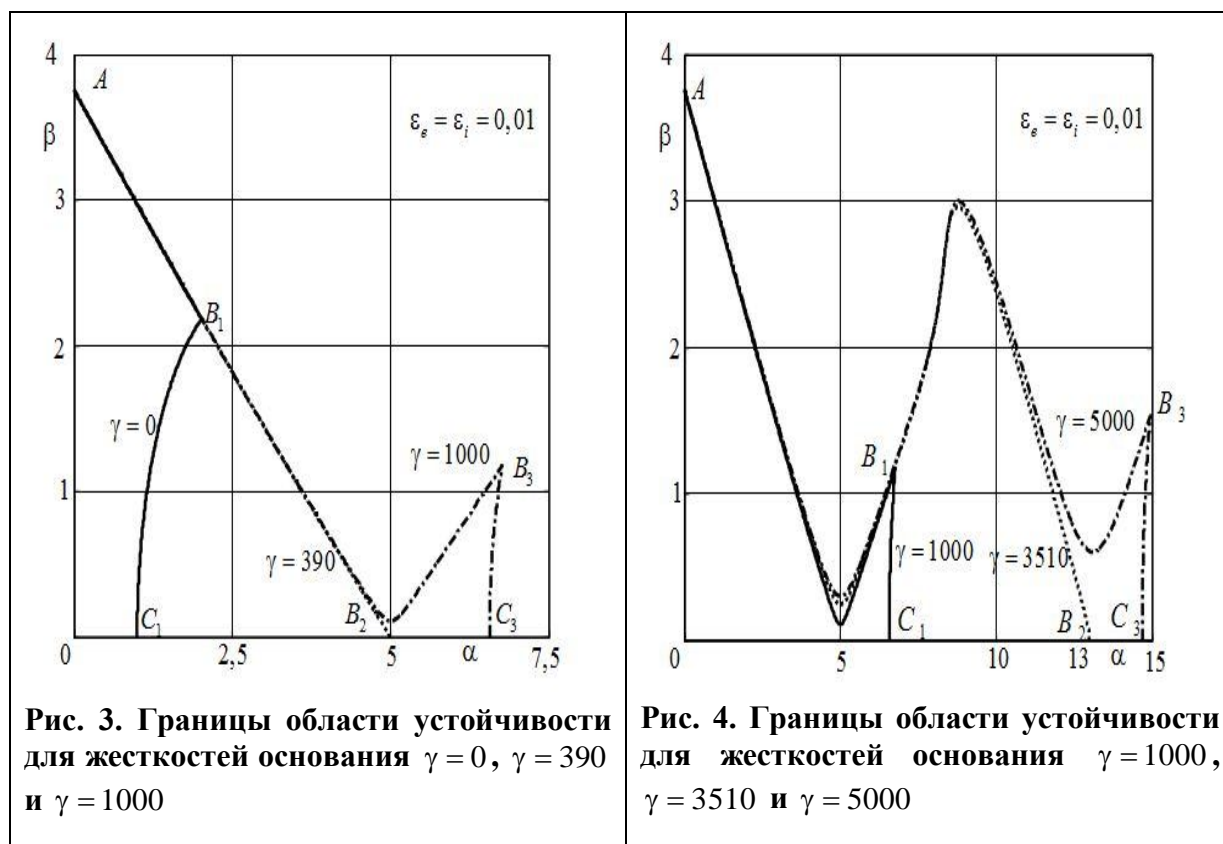
$$\mathbf{A} = \int_0^1 \boldsymbol{\Phi}(\xi) \boldsymbol{\Phi}^T(\xi) d\xi, \quad \mathbf{B} = \int_0^1 \boldsymbol{\Phi}'(\xi) \boldsymbol{\Phi}^T(\xi) d\xi, \quad \mathbf{C} = \int_0^1 \boldsymbol{\Phi}^{IV}(\xi) \boldsymbol{\Phi}^T(\xi) d\xi, \quad \mathbf{D} = \int_0^1 \boldsymbol{\Phi}''(\xi) \boldsymbol{\Phi}^T(\xi) d\xi.$$

Представляя решение уравнения (6) в виде $\mathbf{q}(\tau) = \mathbf{q}_0 \exp(\lambda\tau)$, где λ – характеристические показатели, для исследования устойчивости получим характеристический полином.

Характеристические показатели (в общем случае комплексные числа) полностью определяют поведение системы во времени в окрестности исследуемого на устойчивость положения равновесия. Очевидно, что положение равновесия будет асимптотически устойчивым, если действительные части всех характеристических показателей отрицательные, т.е. $\forall \operatorname{Re} \lambda < 0$. Другими словами все характеристические показатели находятся в левой полуплоскости. При изменении параметров системы и/или параметров нагрузки потеря устойчивости соответствует переходу хотя бы одного характеристического показателя в правую полуплоскость. Причем, если этот переход происходит через начало координат, то тип потери устойчивости при этом носит квазистатический характер и называется дивергенцией. Если же такой переход происходит через мнимую ось с отличной от нуля мнимой частью, то тип потери устойчивости носит колебательный характер и называется флаттером. При этом мнимая часть характеристического показателя определяет частоту флаттера.

За управляющие параметры при исследовании устойчивости рассматриваемой системы примем параметры нагружения α и β , а также жесткость упругого основания γ . Область устойчивости в пространстве α, β, γ ограничена критической поверхностью. Построим сечения критической поверхности плоскостями $\gamma = \text{const}$. Границы области устойчивости на плоскости α, β при различных значениях параметра γ строились с применением критерия Рауса-Гурвица и путем непосредственного вычисления корней характеристического уравнения.

Результаты вычислений по определению положения границы области устойчивости при одновременном действии сжимающего усилия α и аэродинамической нагрузки β представлены на трех рисунках в соответствии с характерными диапазонами изменения жесткости упругого основания γ . Здесь и далее для коэффициентов демпфирования принято $\varepsilon_e = 0,01$ и $\varepsilon_i = 0,01$. На рис. 3 на плоскости потенциальной сжимающей силы α и неконсервативной составляющей аэродинамической нагрузки β представлены границы областей неустойчивости для трех значений жесткости дополнительной упругой опоры $\gamma = 0$, $\gamma = \gamma_1 = 390$ и $\gamma = 1000$ где напомним, γ_1 – жесткость основания, при которой меняется форма потеря устойчивости. Если $\gamma = 0$, то граница области устойчивости, состоящая из границы флаттера AB и границы дивергенции BC , имеет стандартный классический вид. При $\gamma = \gamma_1$ вся граница AB_2 есть граница флаттера. Граница дивергенции здесь выражается в точку. Для случая $\gamma = 1000$ граница флаттера имеет в окрестности $\alpha_1 = 5$ явно выраженный минимум, что соответствует совпадению частот, ответственных за флаттер. Критическое значение скорости потока здесь определяется параметрами рассеяния энергии. После этого значения β_* увеличивается вплоть до пересечения с границей дивергенции B_3C_3 .



Для второго диапазона изменения жесткости основания границы области устойчивости представлены на рис.4. Для сравнения и наглядности здесь приведена и кривая для $\gamma = 1000$. При втором характерном значении жесткости основания $\gamma = \gamma_2 = 3510$, при котором сменяется форма потери устойчивости и $\alpha_2 = 13$ также, как и в предыдущем случае граница дивергенции выражается в точку, а для больших значений γ ($\gamma = 5000$) окрестности этого значения α также имеет место изолированный минимум у границы флаттера

Список литературы:

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – 339 с. .
2. Радин В.П., Щугорев В.Н., Щугорев А.В., Зайкина Ж.В. Устойчивость трубопровода с упругой опорой. Материалы XXI международной научно-технической конференции “**Машиностроение и техносфера XXI века**”, Севастополь 2014. С 224-228.
3. Волошин И.И., Громов В.Г. О критерии устойчивости стержня на упругом основании при действии следящей силы // Изд. АН СССР, Механика твердого тела. – 1977, №4. С. 169 - 171.
4. Радин В.П., Чирков В.П., Щугорев А.В. Устойчивости стержня на упругом основании при непотенциальном нагружении // Строительная механика и расчет сооружений. – 2008, №5. С. 5-11.

Поступила в редколлегию 24.05.2015 г.