УДК 0624.042

Г. М. Улитин, д-р техн. наук, проф., **Г. А. Гусар,** канд. техн. наук, доц.
Донецкий национальный технический университет, ДНР, Россия
Тел./Факс: +79493508675. *E-mail*: gusargan@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПРИ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

В статье рассмотрен общий подход к решению задач динамики продольных колебаний стержней ступенчато- переменной жёсткости со сосредоточенными массами. Он основан на применении метода Фурье. В качестве примера приведена задача для двухступенчатого стержня при внезапно снятой нагрузке.

Ключевые слова: *продольные колебания, ступенчатый стержень, граничные условия, собственные функции, собственные частоты.*

G. M. Ulitin, G. A. Gusar

MATHEMATICAL MODEL OF THE LONGITUDINAL VIBRATIONS OF ROD SYSTEMS DURING DYNAMICAL LOADS

A common method of approach for the solution of problem of the longitudinal vibration rods of stepped variable stiffness with the concentrated masses is considered in this article. It is based on the application of Furie method. As an example the problem for the double-stepped rod during suddenly taken away load is shown.

Keywords: *longitudinal vibrations, stepped road, bordering conditions, own functions, own frequency.*

1. Введение

В различных областях техники и механики используются оборудования, математическими моделями которых служат ступенчато-переменные стержневые системы, несущие сосредоточенные массы. Очевидно, что при решении задач для таких математических моделей требуется знать и изучить свойства собственных функций соответствующих граничных задач. Здесь основная трудность состоит в определении ортогональности собственных функций с учётом ступенчато- переменной жёсткости и сосредоточенных масс.

Собственные колебания и некоторые задачи динамики однородных стержней при различных граничных условиях подробно исследованы в монографии [1], а в работе [2] – колебания от динамических и кинематических возмущений. В работе [3] изучена задача о поперечных колебаниях двухступенчатой бурильной колонны, а в работе [4] рассмотрены теоретические вопросы о свободных колебаниях стержней ступенчато-переменной жёсткости.

2. Основное содержание работы

Остановимся подробно на примере продольных колебаний. Рассмотрим ступенчатый стержень с закреплённым верхнем концом и свободным нижним, но выбор граничных условий не принципиален. На каждом из участков находится сосредоточенная масса M_i в точке $x = r_i$. Начало системы координат выберем в закреплённом конце стержня. К стержню может быть приложена внешняя нагрузка.

В этом случае для каждого участка стержня для нахождения собственных частот колебаний нужно решить волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - a_i^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = 0, \quad i = 1, 2, .., \mathrm{p}, \tag{1}$$

где $u_i(x,t)$ – продольные перемещения сечений стержня *i-го* участка, $a_i^2 = \dfrac{E_i F_i}{m_i}$, $E_i F_i$, m_i – соответственно продольная жесткость и погонная масса участка системы.

Из уравнений (1), разделяя переменные, получаем уравнения для определения собственных функций $X_{in}(x)$ и функций времени:

$$X''_{in} + k_{in}^2 X_{in} = 0; \tag{2}$$

$$\ddot{T}_n + \omega_n^2 T_n = 0, \tag{3}$$

где ω_n - собственная частота колебаний, а $k_{in} = \dfrac{\omega_n}{a_i}$.

Из уравнения (2) следует:

$$X_{in}(x) = A_{in} \cos k_{in} x + B_{in} \sin k_{in} x \tag{4}$$

Для решения уравнения (1) необходимо задать граничные, начальные и условия состыковки участков стержневой системы, которые в собственных функциях примут вид:

$$X_{in}(l_i) = X_{i+1n}(l_i); \quad E_i F_i X'_{in}(l_i) = E_{i+1} F_{i+1} X'_{i+1n}(l_i). \tag{5}$$

Изучим свойства собственных функций, которые необходимы для решения задач на собственные и вынужденные колебания. Собственные функции граничной задачи (1) представим следующим образом:

$$X_n(x) = \sum_{i=1}^{p} (e(l_i - x) - e(l_{i-1} - x)) X_{in}(x),$$

где $e(x)$ – единичная функция, $X_{in}(x)$ – собственные функции на соответствующих участках системы.

Вначале изучим собственные колебания такой системы без учета сосредоточенных масс. Если воспользоваться формулой [1], то для стержневой системы получим равенство:

$$\left(\omega_n^2 - \omega_m^2\right) \int_0^l X_n X_m dx = \sum_{i=1}^{p} a_i^2 \left(X_{im} X'_{in} - X_{in} X'_{im} \right) \Big|_{l_{i-1}}^{l_i}, \tag{6}$$

где $l = \sum_{i=1}^{p} l_i$.

Из выражения (6) следует, как показано в работе [4], что собственные функции будут ортогональны с весом:

$$\rho_1(x) = \sum_{i=1}^{p} m_i (e(l_i - x) - e(l_{i-1} - x)) . \tag{7}$$

Там же было получено при наличии сосредоточенных масс условие ортогональности с весом:

$$\rho_2(x) = 1 + \sum_{i=1}^{p} M_i (e(l_i - x) - e(l_{i-1} - x))\delta(x - r_i) , \tag{8}$$

где $\delta(x)$ – функция дельта Дирака.

Объединяя результаты (7) и (8) окончательно получаем ортогональность собственных функций рассматриваемой граничной задачи с весом:

$$\rho(x) = \rho_1(x) + \rho_2(x) = \sum_{i=1}^{p} \left(m_i + M_i \delta(x - r_i) \right) (e(l_i - x) - e(l_{i-1} - x)) . \tag{9}$$

Эти результаты полностью согласуются с теорией собственных функций [5].

Для решения задач динамики необходимо вычислить квадрат нормы собственных функций. Для этого воспользуемся формулой (6) с весом:

$$\left(\omega_n^2 - \omega_m^2 \right) \int_0^l \rho_1(x) X_n X_m dx = \sum_{i=1}^{p} m_i a_i^2 \left(X_{im} X'_{in} - X_{in} X'_{im} \right) \Big|_{l_{i-1}}^{l_i} . \tag{10}$$

Если теперь в формуле (10) перейти к пределу при $n \to m$ и учесть в разложениях функций только бесконечно малые линейные члены, например, $\omega_n^2 - \omega_m^2 \approx 2\omega_m$, то с условиями состыковки (5), получим формулу для вычисления квадрата нормы:

$$\Delta_n^2 = \int_0^l \rho(x) X_n^2(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p-1} \frac{E_i F_i}{\omega_n^2} X'_{in}(l_i)(l_i X'_{in}(l_i)(1 - \frac{m_i}{m_{i+1}}) - X_{in}(l_i)(1 - \frac{a_{i+1}}{a_i}) +$$

$$+ m_i l_i X_{in}^2(l_i)(1 - \frac{m_{i+1}}{m_i}) + \frac{l m_p}{2} X_{pn}^2(l_i) + \sum_{i=1}^{p} M_i X_{in}^2(r_i) . \tag{11}$$

Если нижний конец защемлён, то предпоследний член в формуле (11) заменяется на: $\frac{E_p F_p}{2\omega_n^2} \left(X'_{pn}(l) \right)^2$.

Из выполнения граничных условий и условий состыковки (5) получаем однородную систему алгебраических уравнений из решения которой определяются собственные частоты колебаний.

При вынужденных колебаниях уравнение (1) будет неоднородным вида:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - a_i^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = f_i(x,t).$$

Здесь в методе решения принципиального различия нет. Только в данном случае вместо уравнения (3) метом Фурье получаем для функций времени уравнение:

$$\ddot{T}_n + \omega_n^2 T_n = f_{in}(t), \tag{12}$$

где $f_{in}(t) = \frac{1}{\Delta_n^2}\int_0^l f_i(x,t)\rho(x)X_n(x)dx$.

Уравнение (12) можно решать методом вариации произвольных постоянных.

В качестве примера рассмотрим задачу динамики двухступенчатого стержня длиною $l = l_1 + l_2$, к которому приложена внешняя нагрузка $f(t) = A\sin\nu t$, а к нижнему концу с массой M приложена сила P, которая внезапно снимается. Аналогичная задача, но об ударе стержня с сосредоточенной массой и без внешней нагрузки, рассмотрена в работе [6].

Граничные условия для данной задачи примут вид:

$$u_1(0,t) = 0; \quad E_2F_2u_2'(l,t) = -M\ddot{u}_2(l,t), \tag{13}$$

а начальные условия

$$u_1(x,0) = p_1x, \qquad 0 \le x \le l_1;$$
$$u_2(x,0) = p_1l_1 + p_2(x - l_1), \quad l_1 < x \le l, \tag{14}$$
$$\dot{u}(x,0) = 0,$$

где $p_i = \frac{P}{E_iF_i}$.

Здесь собственные функции будут ортогональны, согласно формуле (9), с весом:

$$\rho(x) = \begin{cases} m_1, \ 0 \le x \le l_1; \\ m_2 + M\delta(x-l), \, l_1 < x \le l. \end{cases}$$

Из граничных условий и условий состыковки участков с учётом выражения (4) получаем однородную систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} A_{1n} = 0; \\ E_2F_2k_{2n}(A1_{2n}\sin k_{2n}l - B_{2n}\cos k_{2n}l) + M\omega_n^2(A_{2n}\cos k_{2n}l + B_{2n}\sin k_{2n}l) = 0; \\ B_{1n}\sin k_{1n}l_1 = A_{2n}\cos k_{2n}l_1 + B_{2n}\sin k_{2n}l_1; \\ E_1F_1k_{1n}B_{1n}\cos k_{1n}l_1 = E_2F_2k_{2n}(-A_{2n}\sin k_{2n}l_1 + B_{2n}\cos k_{2n}l_1). \end{cases} \tag{15}$$

Приравнивая определитель системы (15) к нулю, получаем уравнение для определения собственных частот колебаний ω_n такой системы:

$$\begin{gathered}(\alpha_2\cos\eta_2 - \alpha_1 ctg\eta_1\sin\eta_2)(\alpha_2\sin\eta + M\omega_n\cos\eta) - \\ -(\alpha_1\operatorname{ctg}\eta_1\cos\eta_2 + \alpha_2\sin\eta_2)(\alpha_2\cos\eta - M\omega_n\sin\eta) = 0,\end{gathered} \tag{16}$$

где $\alpha_i = \dfrac{E_iF_i}{m_i}$, $\eta_i = k_{in}l_1$, $\eta = k_{2n}l$ $\left(i = 1,2\right)$.

Рассмотрим более простой случай, когда $M = 0$. Тогда уравнение (16) примет вид:

$$\alpha_2\sin\eta_1\sin k_{2n}l_2 - \alpha_1\cos\eta_1\cos k_{2n}l_2 = 0. \tag{17}$$

Из системы (15) для этого случая, полагая $B_{1n} = 1$, определяем значения коэффициентов A_{2n} и B_{2n}, и тогда собственные функции (4) примут вид:

$$X_n(x) = \begin{cases} \sin k_{1n}x, & 0 \le x \le l_1; \\ A_n\cos k_{2n}x + B_n\sin k_{2n}x, & l_1 < x \le l, \end{cases}$$

где
$$\begin{aligned} A_n &= \sin k_{1n}l_1\cos k_{2n}l_1 - \alpha\cos k_{1n}\sin k_{2n}l_1; \\ B_n &= \sin k_{1n}l_1\sin k_{2n}l_1 + \alpha\cos k_{1n}\cos k_{2n}l_1. \end{aligned}$$

Квадрат нормы собственных функций можно найти по формуле (11), однако в случае двухступенчатого стержня проще вычислить непосредственно:

$$\begin{gathered}\Delta_n^2 = \int_0^{l_1} m_1X_{1n}^2\left(x\right)dx + \int_{l_1}^{l} m_2X_{2n}^2\left(x\right)dx = \frac{m_1}{4k_{1n}}(2\eta_1 - \sin 2\eta_1) + \frac{m_2}{4k_{2n}}(2\eta_2\left(A_n^2 + B_n^2\right) + \\ +\left(A_n^2 - B_n^2\right)\left(\sin 2\eta - \sin 2\eta_2\right) - A_nB_n\left(\cos 2\eta - \cos 2\eta_2\right)).\end{gathered} \tag{18}$$

В частности, если перейти к пределу при $l_1 \to 0$ (однородный стержень), то из формул (17) и (18) следуют известные выражения для собственных частот колебаний и квадрата нормы [1].

Определим функции времени $T_n(t)$. Уравнение (12) для данной задачи примет вид:

$$\ddot{T}_n + \omega_n^2 T_n = \frac{Am_1}{\Delta_n^2 k_{1n}}(1-\cos\eta_1)\sin\nu t\,. \tag{19}$$

Решением уравнения (19) с учётом начального условия (14) являются функции:

$$T_n(t) = \frac{Am_1(1-cos\eta_1)}{\Delta_n^2 k_{1n}(\nu^2-\omega_n^2)}\left(\frac{\nu}{\omega_n}\sin\omega_n t - \sin\nu t\right) + \cos\omega_n t\,. \tag{20}$$

Будем считать, что частота ν внешней нагрузки не совпадает с собственными частотами, но это не принципиально, т. к. в этом случае будет другое решение уравнения (19), которое определяет резонанс.

Продольные перемещения представим разложением по собственным функциям:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x) T_n(t)\,. \tag{21}$$

Тогда, согласно методу Фурье, получаем:

$$C_n = \frac{1}{\Delta_n^2}(m_1 p_1 \int_0^{l_1} x\sin k_{1n}x dx + m_2\int_{l_1}^{l}\left(p_1 l_1 + p_2(x-l_1)\right)\left(A_n\cos k_{2n}x + B_n\sin k_{2n}x\right)dx =$$

$$= \frac{m_1 p_1}{k_{1n}^2}(\sin\eta_1 - \eta_1\cos\eta_1) + \frac{m_2}{k_{2n}^2}(p_1 A_n \eta_2 + p_2 B_n)(\sin\eta - \sin\eta_2) +$$

$$+ \frac{m_2}{k_{2n}^2}(p_2 A_n + p_1 B_n \eta_1)(\cos\eta - \cos\eta_2) - \frac{m_2 p_2 l_2}{k_n}(A_n\sin\eta + B_n\cos\eta)$$

Итак, перемещения (21) определены, т. к. найдены функции $X_n(t), T_n(t)$ и коэффициенты C_n, входящие в формулу (21). Это позволяет исследовать напряжённо-деформированное состояние системы и, следовательно, изучить её прочностные свойства.

3. Заключение

Таким образом, рассмотренный подход позволяет решать многие задачи динамики, математической моделью которых являются стержневые системы ступенчато-переменной жёсткости при наличии сосредоточенных масс при продольных колебаниях, что является актуальным для многих технических задач. При этом, т. к. математическая модель полностью аналогична математической модели крутильных колебаний, то данный подход к решению таких задач можно применять и для технических задач о крутильных колебаниях [7].

ЛИТЕРАТУРА:

1. Тимошенко, С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко. – М.: Наука, 1967. – 449 с.

2. Барагунова, Л. А., Шогенова, М. М. Продольные колебания стержней от динамических возмущений. Строительство и архитектура /Весник Дагестанского государственного технического университета – 2022, №49 (2).- С. 87-93.

3. Улитин, Г. М. Математическая модель поперечных колебаний двухступенчатой бурильной колонны / Г. М. Улитин, Ю. В. Петтик // Сборник научно-методических работ - Донецк: ДонНТУ, 2023.- Вып.13.- С. 204-209.

4. Улитин, Г. М. К теории стержневых систем ступенчато-переменной жёсткости / Г. М. Улитин // Автоматизация виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні // Зб. наукових праць – Львів, 2006. – Вип. 40. – С. 250 – 254.

5. Арсенин, В. Я. Методы математической физики и специальные функции / В. Я. Арсенин – М.: Наука, 1974. – 432 с.

6. Улитин, Г. М. Математическая модель ударных процессов в двухступенчатых бурильных колоннах / Г. М. Улитин, Ю. В. Петтик // Вібрації в техніці та технологіях. – 2007. - №3(48). – С. 26-29.

7. Царенко, С. Н. Динамика валопровода гребного винта при импульсивном воздействии / С. Н. Царенко, Г.М. Улитин, С. Ю. Трунев // Судостроение и судоремонт. Вестник государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова- 2022-т.14, №3.-С. 748-758.

Поступила в редколлегию 24.01.2024 г.