

УДК 62-229.3:621.01: 514.85

Ю. В. Пипкин, канд. техн. наук, доцент

Государственное образовательное учреждение высшего образования Луганской Народной Республики «Донбасский государственный технический институт», г. Алчевск, Луганская Народная Республика

Тел.: +7(959)-152-18-81; E-mail: yury-sizam@mail.ru**БАРИЦЕНТРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ НА БАЗИСЕ ОПОРНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ СИЛОВОГО ЗАМЫКАНИЯ СТАНОЧНОГО ПРИСПОСОБЛЕНИЯ**

В статье рассматривается задача определения реакций в опорных точках установочной базы при силовом замыкании заготовки в станочном приспособлении. Представлено решение этой задачи с позиций моделирования силового замыкания на основе принципа возможных перемещений. Показано, что итоговые формулы включают в себя барицентрические координаты относительно опорных точек установочной базы. Опорные точки установочной базы являются базисом барицентрических координат.

Ключевые слова: силовое замыкание, установочная база, опорные точки, барицентрические координаты, координатный базис на трех точках, станочное приспособление.

Yu. V. Pipkin**BARYCENTRIC COORDINATES ON THE SPECIFIED TO LOCATING POINTS TRIANGLE IN MODELING THE FORCE CLOSURE IN WORKHOLDING FIXTURE**

The article considers the problem of determining the reactions at the locating (reference) points of the setting base during the force closure of the workpiece in the workholding fixture. A solution to this problem is presented from the standpoint of modeling a force closure based on the principle of possible displacements. It is shown that the resulting formulas include barycentric coordinates relative to the locating (reference) points of the setting base. The locating points of the setting base are the basis of the barycentric coordinates.

Keywords: force closure, setting base, locating points, barycentric coordinates, coordinate basis on three points, workholding fixture.

Постановка проблемы. Станочные приспособления являются важной подсистемой технологической системы механической обработки. Выполненные на основе математического и натурального моделирования исследования силового замыкания фрезерного приспособления показали, что в технической системе станочного приспособления существуют такие безразмерные сочетания жесткостных параметров и силовых входных переменных, при которых погрешность обработки, связанная с упругими деформациями в опорах, минимизируется, приводя к повышению жесткости технологической системы и позволяя повысить производительность технологической операции [1]. Дальнейшие теоретические исследования для раскрытия механизмов установленных закономерностей требуют применения новых методов, органически связанных с уже имеющимися подходами.

Анализ состояния вопроса. Барицентрические координаты (БЦК), предложенные А. Ф. Мебиусом в 1827 году, находят сегодня применение в разнообразных практических приложениях. БЦК используются в методе конечных элементов [2], в компьютерной графике при геометрическом моделировании [3], в калориметрии при вычислениях цветности в RGB-плоскости [4, 5], для описания геометрии пространственных механизмов (роботов) [6], компьютерной анимации [7], химии и металлургии [5]. Междисциплинарное применение БЦК определяется в первую очередь простотой их введе-

ния, которая основывается на понятии центра масс системы материальных точек. Например, для системы двух материальных точек центр масс определяется по принципу «золотого правила механики» через равенство произведений массы в точках на расстояния до центра масс. Строгое описание БЦК можно найти в работах [5, 8-12].

Основная особенность введения БЦК заключается в том, что для задания (или определения) координат точки в n -мерном пространстве используется $n+1$ точка этого пространства – для задания координат на прямой (1-мерное пространство) используется 2 точки, связанные отрезком; на плоскости (2-мерное пространство) – 3 точки, не лежащие на одной линии (треугольник); в пространстве (3 измерения) – 4 точки, не лежащие в одной плоскости (тетраэдр). Такие точки называются базисными, а система точек – базисом БЦК. Координаты точки при этом задаются как значения масс в базисных точках таких, при которых выбранная точка является центром масс системы базисных точек, т.е. все массы в базисных точках относительно выбранной точки уравновешены.

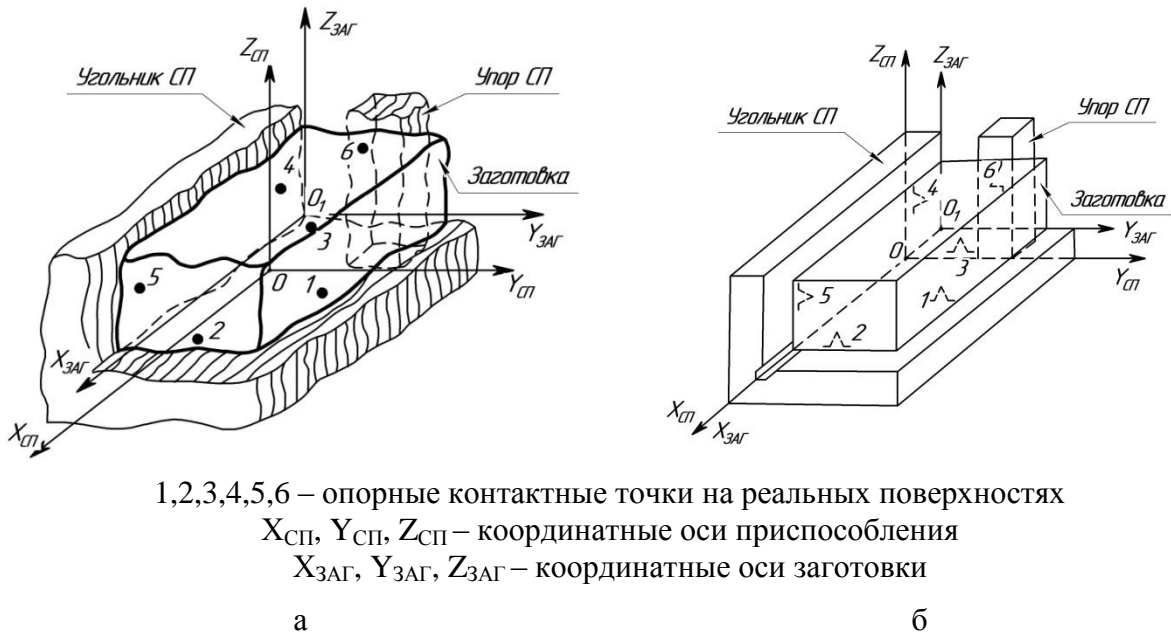
Учитывая многопрофильность применения и возможность переноса навыков использования данного универсального теоретического инструментария, дальнейший поиск практических приложений БЦК и их определение в конкретных практических задачах представляет научный и инженерный интерес.

В машиностроении в качестве одной из основных составляющих методики достижения геометрической точности деталей машин определены положения теории базирования [13]. Базирование детали для механической обработки на металлорежущем станке обеспечивается при ее установке (базировании и последующем закреплении прижимными усилиями) в станочном приспособлении (СП). При приложении зажимных сил заготовка полностью лишается 6-ти степеней свободы относительно приспособления и настроенного на размер режущего инструмента. Путем силового замыкания односторонние связи, накладываемые на заготовку опорными элементами, преобразуются в двухсторонние. Схема базирования предполагает установление 6-ти базовых точек, некоторые из которых могут быть неявными и скрытыми. Наиболее удобной базой является установочная явная база, реализуемая базовой плоскостью заготовки и обозначаемая 3-мя базовыми точками 1, 2, 3 (рис. 1).

Порядок выбора положения начала координат приспособления в точке O и заготовки в точке O_1 (рис. 1) стандартом не определен и является в большой степени произвольным. Из-за неопределенности выбора положения точки начала координат в установившихся методиках силового расчета и расчета на точность применение координатных систем не является обязательным.

Применение же БЦК на базисе опорных точек базирования представляется достаточно органичным. В качестве начала координат выступают базисные точки, положение которых задается теоретической схемой базирования, при этом она получает определенный геометрический смысл через расстояния между базисными базовыми точками.

В процессе решения задач моделирования силового замыкания была предложена базовая расчетная схема, в которую входят три опорных элемента, обеспечивающие базирование детали по плоскости и выполнение заданного от этой плоскости размера [14] (рис.2). Схема обеспечивает минимальную размерность математической модели силового замыкания [1].



1,2,3,4,5,6 – опорные контактные точки на реальных поверхностях

$X_{СП}, Y_{СП}, Z_{СП}$ – координатные оси приспособления

$X_{ЗАГ}, Y_{ЗАГ}, Z_{ЗАГ}$ – координатные оси заготовки

а

б

Рисунок 1. Базирование заготовки по трем плоскостям в «координатный угол»:
 а – базирование по реальным поверхностям;
 б – базирование идеальными поверхностями

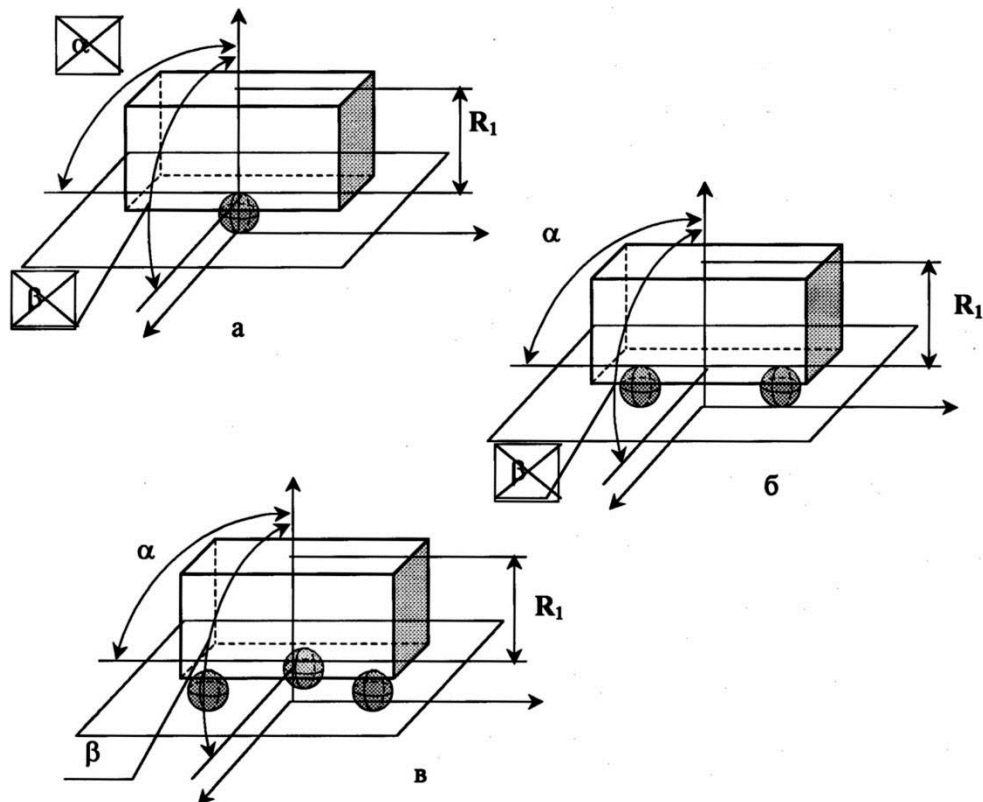


Рисунок 2. Модель установки заготовки плоской базовой поверхностью [14]:
 а – на один опорный шар (размер R_1 выдерживается только в одной точке);
 б – на два опорных шара (размер R_1 выдерживается по линии двух точек);
 в – на три опорных шара (размер R_1 выдерживается по всей плоскости)

В базовой расчетной схеме (рис. 2) опорные шары соответствуют базовым точкам 1, 2, 3 установочной базы на рисунке 1. Если принять эти точки в качестве базиса БЦК на плоскости, то для каждой точки плоскости можно определить три значения, однозначно определяющие ее положение относительно базисных базовых точек (рис. 3). Обозначим точки установочной базы как S_1, S_2, S_3 (буква «S» выбрана от заданного стандартом термина «установочная база» на английском «Setting base»). Расстояния между точками можно записать через точки концы отрезков $(S_1S_2), (S_2S_3), (S_1S_3)$. Для сокращения записи удобнее использовать обозначение длины с индексами точек - $(S_1S_2)=L_{12}, (S_2S_3)=L_{23}, (S_1S_3)=L_{13}$.

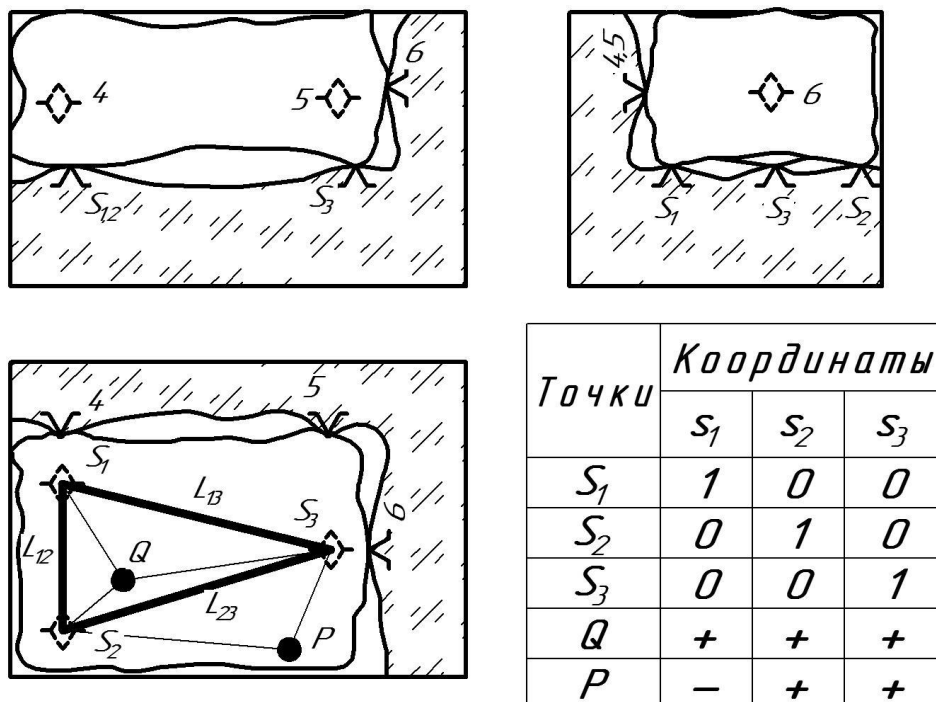


Рисунок 3. Введение барицентрических координат на базисе опорных точек установочной базы

Как отмечалось выше, в БЦК произвольная точка плоскости может быть задана единственным способом тройкой чисел (s_1, s_2, s_3) (см. таблицу на рис. 3), на основе которых можно получить значения масс, такие, что выбранная точка будет центром масс системы базисных точек, т.е. имеют место следующие равенства:

$m=m_1+m_2+m_3$ – масса m , приведенная к точке центра масс равна сумме масс в базисных точках;

$s_1= m_1/m, s_2= m_2/m, s_3= m_3/m$ – определение координат через отношения масс в точках к общей массе системы;

$s_1 + s_2 + s_3 = 1$ – необходимое условие единственности координат.

Одним из наиболее распространенных способов определения численных значений БЦК является нахождение отношения площадей треугольников, сформированных заданной точкой и базисными точками, к площади базисного треугольника, т.е. для точки Q (рис. 3) имеем:

$$s_{Q1} = \frac{S_{\Delta 23Q}}{S_{\Delta 123}}, \quad s_{Q2} = \frac{S_{\Delta 13Q}}{S_{\Delta 123}}, \quad s_{Q3} = \frac{S_{\Delta 12Q}}{S_{\Delta 123}} \quad (1)$$

где s_{Q1}, s_{Q2}, s_{Q3} - значение барицентрической координаты точки Q, соответственно в точках S_1, S_2, S_3 базисного треугольника;

$S_{\Delta 23Q}, S_{\Delta 13Q}, S_{\Delta 12Q}$ - площадь треугольников, определенных на точках, соответственно $(S_2, S_3, Q), (S_1, S_3, Q), (S_1, S_2, Q)$ (рис. 3);

$S_{\Delta 123}$ - площадь базисного треугольника, определенного на точках (S_1, S_2, S_3) .

Следует обратить внимание, что для точки, которая находится внутри базисного треугольника знаки координат положительные и все они будут по величине меньше 1. Но для точки, что находится вне базисного треугольника, координата, которая соответствует противоположной базисной точке, становится отрицательной, что видно из таблицы на рисунке 3 для точки P. При этом величина этой координаты определяется как разность $s_{P1}=1-(s_2 + s_3)$, т.е. $(s_2 + s_3) > 1$.

Целью данного исследования является обоснование применения БЦК в приложении к анализу силового замыкания станочного приспособления.

Материалы исследования. При выполнении анализа силового замыкания фрезерного приспособления на основе базовой расчетной схемы (рис. 2) требовалось учесть перераспределение сил и деформаций между тремя опорными элементами при воздействии активных сил - зажимной силы Q^n (обозначение «Q» принято на основе второй буквы английского значения термина «равновесие» - «equilibrium») и силы резания P^n (обозначение «P» принято на основе первой буквы английского значения термина «сила» - «power»). Активные силы действуют перпендикулярно (нормально) к плоскости опорного треугольника, что отражено индексом «n» при обозначениях сил – Q^n и P^n . Точка приложения зажимной силы как правило находится внутри треугольника опор (точка Q на рис. 3 и точка q на рис. 4), а точка приложения силы резания часто располагается вне треугольника опор (точка P на рис. 3 и точка p на рис. 4).

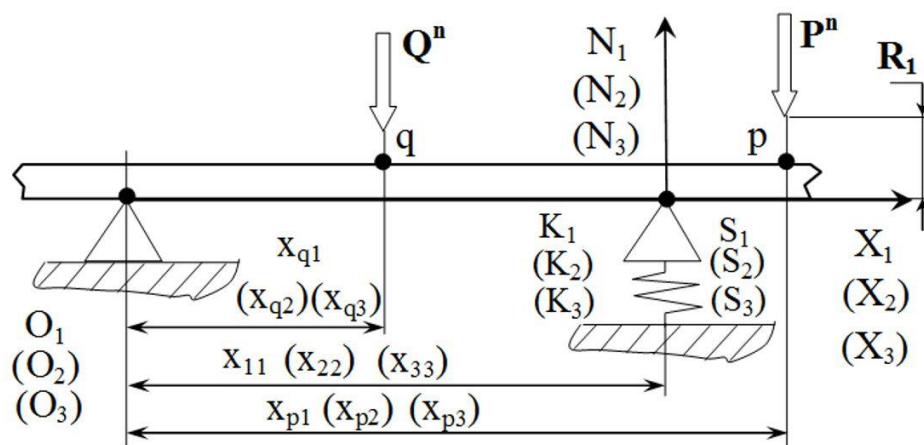


Рисунок 4. Расчетная схема для определения реакций в опорных точках установочной базы

Точки начала координат O_1, O_2, O_3 находятся на стороне, противоположной базовой точке. Таким образом, для базовой точки S_1 начало координат находится на стороне (S_2, S_3) . Для остальных базовых точек аналогично. При этом расстояние (O_1, S_1) должно быть наикратчайшим, что возможно только при опускании высоты из опорной (базовой) точки на противоположную сторону треугольника опор.

Следовательно, для определения реакций в опорах (а также, с учетом значений жесткостей K_i , - деформаций в опорах) рассматриваем одновременно три подсистемы (рис. 5), координатные оси которых направлены вдоль высот треугольника. Наименование осей « X_i » выбрано вследствие того, что эта координатная ось вводится первой, индекс « i » соответствует номеру вершины треугольника, из которой опущена высота. Положительное направление координатных осей – в направлении отрезка (S_i, O_i) .

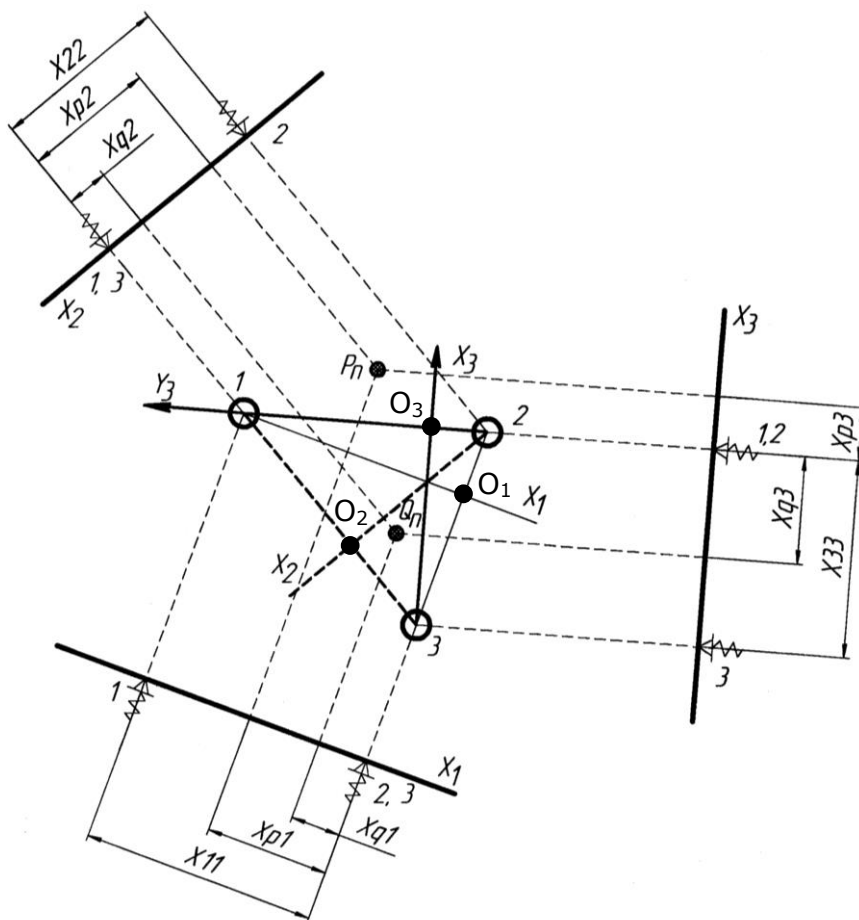


Рисунок 5. Подсистемы координатных осей для определения реакции в опорах

Из рисунка 5 можно видеть, что координаты точек соответствуют высотам, опущенным из этих точек на сторону треугольника опор, перпендикулярную оси X_i .

Для определения реакций в опорах под действием активных сил удобно рассмотреть возможные смещения системы силового замыкания – малые перемещения $\delta_{K1}, \delta_{K2}, \delta_{K3}$ в направлении упругих связей, соответственно в точках S_1, S_2, S_3 (рис. 6). При этом точки приложения зажимной силы и силы резания также получают свои перемещения δ_{q1} и δ_{p1} от δ_{K1} , δ_{q2} и δ_{p2} от δ_{K2} , δ_{p3} и δ_{p3} от δ_{K3} . На расчетной схеме (рис. 6) возможные перемещения представлены отрезками:

$\delta_{K1} = (S_{10}S_{1\delta})$, $\delta_{K2} = (S_{20}S_{2\delta})$, $\delta_{K3} = (S_{30}S_{3\delta})$ - где S_{i0} , $S_{i\delta}$, соответственно, точки начального «нулевого» и деформированного положения для «i» точки базисного треугольника;

$\delta_{q1} = (q_{01}q_{\delta1})$, $\delta_{q2} = (q_{02}q_{\delta2})$, $\delta_{q3} = (q_{03}q_{\delta3})$ - где q_{0i} , $q_{\delta i}$ аналогично соответственно точки начального «нулевого» и деформированного положения для «i» точки базисного треугольника;

$\delta_{p1} = (p_{01}p_{\delta1})$, $\delta_{p2} = (p_{02}p_{\delta2})$, $\delta_{p3} = (p_{03}p_{\delta3})$ - где p_{0i} , $p_{\delta i}$ аналогично соответственно точки начального «нулевого» и деформированного положения для «i»-й точки базисного треугольника.

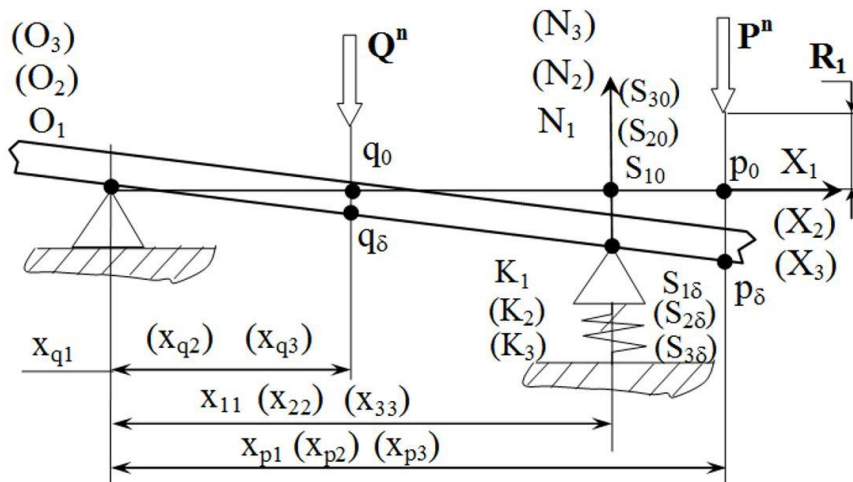


Рисунок 6. Возможные перемещения в направлении упругой связи в системе силового замыкания

На основе принципа возможных перемещений уравнения равновесия записываются как равенство нулю суммы работ действующих в системе сил на величине возможных перемещений:

$$N_1\delta_{K1} + Q^n\delta_{q1} + P^n\delta_{p1} = 0,$$

$$N_2\delta_{K2} + Q^n\delta_{q2} + P^n\delta_{p2} = 0,$$

$$N_3\delta_{K3} + Q^n\delta_{q3} + P^n\delta_{p3} = 0.$$

По схеме на рисунке 6 из подобия прямоугольных треугольников $\Delta(q_{0i}q_{\delta i}O_i)$, $\Delta(p_{0i}p_{\delta i}O_i)$, $\Delta(S_{i0}S_{i\delta}O_i)$ можно выразить возможные перемещения в точках приложения активных сил через возможное перемещение в «i»-й опоре с учетом отношения координат точек:

$$\frac{\delta_{qi}}{\delta_{Ki}} = \frac{x_{qi}}{x_{ij}} \text{ откуда } \delta_{qi} = \delta_{Ki} \frac{x_{qi}}{x_{ij}}; \text{ а также } \frac{\delta_{pi}}{\delta_{Ki}} = \frac{x_{pi}}{x_{ij}} \text{ откуда } \delta_{pi} = \delta_{Ki} \frac{x_{pi}}{x_{ij}}.$$

Тогда уравнения равновесия получают вид (для определения реакции в «i»-й опоре):

$$N_i \delta_{Ki} + Q^n \delta_{Ki} \frac{x_{qi}}{x_{ii}} + P^n \delta_{Ki} \frac{x_{pi}}{x_{ii}} = 0.$$

После выноса за скобки возможного перемещения δ_{Ki} и его сокращения, а также преобразования относительно неизвестной реакции, получаем выражение:

$$N_i = - \left(Q^n \frac{x_{qi}}{x_{ii}} + P^n \frac{x_{pi}}{x_{ii}} \right). \quad (2)$$

Как уже отмечалось выше, координаты точек в принятых координатных осях ($O_i X_i$) представляют собой высоты, опущенные из этих точек на стороны базисного треугольника (рис. 3 и 5). Таким образом, площадь треугольников, используемых для определения значения БЦК по формулам (1) может быть определена через произведение высоты на соответствующую сторону:

$$S_{\Delta 23Q} = \frac{1}{2} x_{q1} \cdot L_{23}, \quad S_{\Delta 13Q} = \frac{1}{2} x_{q2} \cdot L_{13}, \quad S_{\Delta 12Q} = \frac{1}{2} x_{q3} \cdot L_{12} \quad \text{- для точки } q;$$

$$S_{\Delta 23P} = \frac{1}{2} x_{p1} \cdot L_{23}, \quad S_{\Delta 13P} = \frac{1}{2} x_{p2} \cdot L_{13}, \quad S_{\Delta 12P} = \frac{1}{2} x_{p3} \cdot L_{12} \quad \text{- для точки } p;$$

$$S_{\Delta 123} = \frac{1}{2} x_{11} \cdot L_{23} = \frac{1}{2} x_{22} \cdot L_{13} = \frac{1}{2} x_{33} \cdot L_{12} \quad \text{- для базисного треугольника.}$$

Подставляя полученные площади в (1) определим значение БЦК на базе точек установочной базы:

$$s_{Q1} = \frac{S_{\Delta 23Q}}{S_{\Delta 123}} = \frac{x_{q1} \cdot L_{23}}{2} \frac{2}{1 \cdot x_{11} \cdot L_{23}} = \frac{x_{q1}}{x_{11}}, \quad s_{Q2} = \frac{S_{\Delta 13Q}}{S_{\Delta 123}} = \frac{x_{q2} \cdot L_{13}}{2} \frac{2}{1 \cdot x_{22} \cdot L_{13}} = \frac{x_{q2}}{x_{22}},$$

$$s_{Q3} = \frac{S_{\Delta 12Q}}{S_{\Delta 123}} = \frac{x_{q3} \cdot L_{12}}{2} \frac{2}{1 \cdot x_{33} \cdot L_{12}} = \frac{x_{q3}}{x_{33}} \quad \text{- для точки } q;$$

$$s_{P1} = \frac{S_{\Delta 23P}}{S_{\Delta 123}} = \frac{x_{p1} \cdot L_{23}}{2} \frac{2}{1 \cdot x_{11} \cdot L_{23}} = \frac{x_{p1}}{x_{11}}, \quad s_{P2} = \frac{S_{\Delta 13P}}{S_{\Delta 123}} = \frac{x_{p2} \cdot L_{13}}{2} \frac{2}{1 \cdot x_{22} \cdot L_{13}} = \frac{x_{p2}}{x_{22}},$$

$$s_{P3} = \frac{S_{\Delta 12P}}{S_{\Delta 123}} = \frac{x_{p3} \cdot L_{12}}{2} \frac{2}{1 \cdot x_{33} \cdot L_{12}} = \frac{x_{p3}}{x_{33}} \quad \text{- для точки } p.$$

Полученные отношения в форме $s_{Qi} = \frac{x_{qi}}{x_{ii}}$ и $s_{Pi} = \frac{x_{pi}}{x_{ii}}$ соответствуют отношениям координат в формуле (2), которая может быть переписана через БЦК:

$$N_i = - \left(Q^n s_{Qi} + P^n s_{Pi} \right). \quad (3)$$

Из полученного выражения следует, что величина реакции в опоре базисного треугольника установочной базы определяются как сумма произведений активных сил на величину барицентрической координаты точки приложения каждой из этих сил. Так

как количество активных сил было выбрано безусловно, то выражение (3) можно переписать в общем виде:

$$N_i = - \left(\sum_1^k Q_k^n s_{Q_k i} + \sum_1^f P_f^n s_{P_f i} \right), \quad (4)$$

где k и f - произвольные целые числа, соответствующие количеству точек приложения зажимных сил и сил резания;

$s_{Q_k i}$ и $s_{P_f i}$ - барицентрические координаты точек Q_k и P_f в «i»-й точке базисного треугольника.

Знак «-» перед скобками в выражениях (2), (3) и (4) означает, что реакция в опоре направлена против виртуального перемещения, допускаемого жесткостью опоры. Значение «-» барицентрических координат для определенной точки будет означать изменение направления реактивной силы в соответствующей опорной точке для данной активной силы в этой точке.

Следует также отметить, что при анализе равновесия при силовом замыкании станочного приспособления постановка задачи определения барицентрических координат отличается от изначальной [8-12]. Классические БЦК на плоскости определяются как задание таких значений масс в точках базисного треугольника, при которых в заданной точке будет находиться центр масс системы материальных точек, состоящей из точек базисного треугольника. При расчете величины реакций в опорах станочного приспособлений задача принимает следующий вид – определение величины и направления реакций в опорах базисного треугольника, при которых активная сила, заданная в точке приложения, будет уравниваться реакциями в опорах (базисных точках). В такой постановке задача определения БЦК формулируется впервые и требует дальнейшего анализа.

Выводы. Представленные результаты показывают, что выражения для определения величины реакции в базовых (опорных) точках установочной базы, полученные на основе принципа виртуальных перемещений в форме (2), включают в себя соотношения координат, которые совпадают с барицентрическими координатами, заданными на плоскости трех базисных точек, соответствующих опорным точкам.

Таким образом, можно рекомендовать применение БЦК для математического моделирования и анализа расчетных схем силового замыкания станочного приспособления.

При этом теоретическая схема базирования, выраженная 6-тью базовыми опорными точками получает конкретное геометрическое содержание – как набор параметров базисного треугольника в виде длин сторон и углов. Этот набор параметров служит основой для определения площади базисного треугольника, необходимой для определения значений БЦК.

Для развития методики силового расчета станочных приспособлений получены выражения с БЦК для определения реакции в базисных базовых точках установочной базы в форме (3) для двух активных сил (одной зажимной и одной резания) и в форме (4) для произвольного количества активных сил.

Важным теоретическим результатом приведенного анализа является то, что инструментарий БЦК получил приложение к практической задаче для апробации обще-

теоретических выкладок в области геометрии треугольников [9-11] и геометрии масс [5, 8, 12].

ЛИТЕРАТУРА:

1. Пипкин, Ю. В. Обоснование параметров фрезерных приспособлений моделированием силового замыкания: автореф. дис. ... канд. техн. наук [Электронный ресурс] / Ю. В. Пипкин ДонГТУ. – Алчевск: 2020. – 21 с. Доступ: https://www.dstu.education/ru/ru/files/sovet_donstu/diss/auto_pipkin.pdf (дата обращения 16.10.2022)
2. Сычугова, Е. П. Метод конечных элементов для решения уравнения переноса на неструктурированных тетраэдральных сетках / Е. П. Сычугова, Е. Ф. Селезнев // Препринт. Ин-т проблем безопас. развития атом. энергетики РАН. – № 03. – М. ИБРАЭ РАН, 2014. – 21 с.
3. Tao J. A Fast Numerical Solver for Local Barycentric Coordinates / Jiong Tao, Bailin Deng, Juyong Zhang // Computer Aided Geometric Design. - 2019. - № 3 (70). - P. 46-58.
4. Волошинов, А. В. Концепция барицентра и компьютерная колориметрия живописных образов / А. В. Волошинов, В. В. Фирстов // Математика. Компьютер. Образование. Сб. трудов XII международной конференции; под общ. ред. Г. Ю. Ризниченко. – Ижевск: Научно-издательский центр "Регулярная и хаотическая динамика", 2005. – Т. 2. – С. 502-511.
5. Балк, М. Б. Геометрия масс. / М. Б. Балк, В. Г. Болтянский. М.: Наука., 1987. – Вып. 61. – 160 с.
6. Корецкий, А. В. Компьютерное моделирование кинематики манипуляционных роботов. / А. В. Корецкий, Н. В. Осадченко. - М.: Изд-во МЭИ, 2000. – 48 с.
7. Veacco A. Footstep parameterized motion blending using barycentric coordinates / A. Veacco, N. Pelechano, M. Kapadia, N.I. Badler // Computers & Graphics. – 2015. – 47. – P. 105–112.
8. Балк, М. Б. Геометрические приложения понятия о центре тяжести / М. Б. Балк– М.: ФИЗМАТГИЗ, 1959. – Вып. 9. – 233 с.
9. Мякишев, А. Г. Элементы геометрии треугольника / А. Г. Мякишев. – М.: МЦНМО, 2002. – 32с.:ил.
10. Понарин, Я. П. Элементарная геометрия: В 3-х т. Т. 3. Треугольники и тетраэдры. – М.: МЦНМО, 2009. – 192 с.
11. Шкроба, С. П. Векторно-координатная геометрия относительно треугольника. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. — 396 с
12. Заставный, В. П. Геометрия масс: учебное пособие / В. П. Заставный. – 2-е изд., перераб. и доп. – Донецк: ДонНУ, 2021 . – 111 с.
13. ГОСТ 21495-76. Базы и базирование. Термины и определения. – М: Изд-во стандартов, 1990. – 37 с.
14. Пипкин, Ю. В. Базовая расчетная схема силового замыкания в станочных приспособлениях. / Ю. В. Пипкин, А. Н. Зелинский, Н. В. Коцюбинская // Прогрессивные технологии и системы машиностроения: Международный сб. научн. трудов. – Донецк: ДонНТУ, 2006. – Вып. 31. – С. 227-237.

Поступила в редколлегию 23.01.2023 г.