УДК 621.793

[1]**М. А. Белоцерковский,** д-р техн. наук, проф.,[2]**К. Е. Белявин,** д-р техн. наук, проф.
[1]**И. А. Сосновский,**[1]**А. А. Курилёнок,** канд. техн. наук
[1]Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси, Минск, РБ
[2]Белорусский национальный технический университет, Минск, РБ
Тел.: 250-15-42, факс: 272-28-90, E-mail: sos3@tut.by

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МЕТОДИКА ОПТИМИЗАЦИИ АДГЕЗИОННОЙ ПРОЧНОСТИ ПОКРЫТИЙ, ПОЛУЧАЕМЫХ МЕТОДОМ ЦЕНТРОБЕЖНОЙ ИНДУКЦИОННОЙ НАПЛАВКИ

В статье приводятся результаты выполненных исследований по установлению взаимозависимости параметров пористой структуры и параметров работоспособности (прочность сцепления покрытия с основой) с технологическими режимами получения покрытий, получаемых методом центробежной индукционной наплавки.

Учитывая, что прочность сцепления покрытия с основой является одним из наиболее важных параметров, определяющих работоспособность изделий с покрытиями,приведена разработанная математическая методика оптимизации адгезионной прочности покрытий, основанная на использовании метода неопределенных множителей Лагранжа.

Ключевые слова: *математическая методика оптимизации, центробежная индукционная наплавка, прочность сцепления покрытия с основой, заданная пористость покрытия, метод неопределенных методов Лагранжа.*

M. A. Belotserkovsky, K. E. Belyavin, I. A. Sosnovsky, A. A. Kurilyonok

MATHEMATICAL METHOD FOR OPTIMIZING THE ADHESIVE STRENGTH OF COATINGS OBTAINED BY THE METHOD OF CENTRIFUGAL INDUCTION SURFACING

The article presents the results of the studies carried out to establish the interdependence of the parameters of the porous structure and the performance parameters (the strength of adhesion of the coating to the base) with the technological modes of obtaining coatings obtained by the method of centrifugal induction surfacing.
Given that the adhesion strength of the coating to the substrate is one of the most important parameters that determine the performance of products with coatings, the developed mathematical method for optimizing the adhesive strength of coatings based on the use of the method of indeterminate Lagrange multipliers is presented.
Keywords: *mathematical method for optimizing, centrifugal inductionsurfacing,the strength of adhesion of the coating to the base,specified porosity of the coating, the method of indeterminate Lagrange multipliers.*

1. Введение

При исследовании и оптимизации технологических процессов очень часто возникает необходимость в одновременном рассмотрении нескольких параметров оптимизации. В таких случаях решают компромиссные задачи, т. е. находят условный экстремум для одной поверхности отклика при ограничениях, налагаемых одной или несколькими другими поверхностями откликов. Так, например, режим наплавки необходимо выбрать таким, чтобы обеспечивалась заданная толщина наплавленного слоя при минимальной высоте неровностей наплавленной поверхности. При обработке резанием примером компромиссной задачи может служить определение условий, обеспечивающих наибольшую стойкость инструмента при заданной производительности. Очень часто при определении условий протекания того или иного процесса накладываются ограничения экономического характера.

Если математические модели для всех параметров оптимизации – линейные функции, то можно для решения компромиссной задачи пользоваться методами линейного программирования [1].

Однако при решении практических задач по оптимизации технологических процессов математические модели для параметров оптимизации часто представлены нелинейными функциями. В этих случаях компромиссные задачи можно решать двумя способами графическим и аналитическим.

При графическом способе решения компромиссной задачи строят двухмерные сечения одной поверхности отклика, которые совмещают с двухмерными сечениями другой поверхности отклика. Анализируя совмещенные двухмерные сечения, находят условные экстремумы. Двухмерные сечения получают следующим образом. В уравнения регрессии подставляют значения (предположительно близкие к оптимальным) всех факторов, кроме любых двух. Задавшись определенным значением функции отклика, получают зависимость между двумя факторами, которую на плоскости можно представить кривой. Координаты любой точки этой кривой отвечают сочетанию значений факторов, обеспечивающих получение одного и того же значения функции отклика. Задавая различные значения параметру оптимизации, можно построить семейство кривых равного отклика. Этим способом можно получить наглядное представление о влиянии каждой пары факторов на параметр оптимизации.

Графический метод достаточно прост и отличается большой наглядностью, однако он удобен только при малом числе факторов. При числе факторов $k>3$ графический метод оказывается очень громоздким. С помощью совмещенных двухмерных сечений решалась задача, связанная с поиском условий наплавки, обеспечивающих заданную пористость покрытия при максимальной адгезионной прочности.

При аналитическом решении компромиссной задачи можно использовать метод неопределенных множителей Лагранжа [2].

Целью работы являлась разработка математической методики оптимизации адгезионной прочности покрытий, получаемых методом центробежной индукционной наплавки, с использованием метода неопределенных множителей Лагранжа.

2. Теоретические аспекты метода оптимизации технологии центробежной индукционной наплавки

Рассмотрим применение метода неопределенных множителей Лагранжа [2] для нахождения условного экстремума функции двух переменных, которые связаны одним условием.

Пусть требуется найти экстремумы функции

$$u = f(x, y) \tag{1}$$

при условии, что x и y связаны уравнением

$$\varphi(x, y) = 0 \tag{2}$$

При наличии условия (2) из двух переменных x и y независимым будет только одно, например x, так как y определяется из равенства (2) как функция от x. Если бы мы разрешили уравнение (2) относительно у, то, подставляя в равенство (1) вместо y найденное выражение, получили бы функцию одного переменного x, и свели бы задачу к исследованию на максимум и минимум функции одного независимого переменного x.

Поставленную задачу можно решить, не разрешая уравнения (2) относительно x или y. При тех значениях x и y, при которых функция u может иметь экстремум, производная от u по x должна обращаться в нуль.

Из (1) находим $\dfrac{du}{dx}$ помня, что y есть функция от x:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

В точках экстремума

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \qquad (3)$$

Из равенства (2) находим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \qquad (4)$$

Равенство (4) удовлетворяется для всех x и y, удовлетворяющих уравнению (2).

Умножив члены равенства (4) на неопределенный пока коэффициент λ и сложив их с соответствующими членами равенства (3), получим

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

или

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx} = 0. \qquad (5)$$

Равенство (5) выполняется во всех точках экстремума. Подберем λ так, чтобы для значений x и y, соответствующих экстремуму функции u, вторая скобка в равенстве (5) обратилась в нуль (при этом предполагается, что в критических точках $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0$)

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Но тогда при этих значениях x и y из равенства (5) следует равенство

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Таким образом, получается, что в точках экстремума удовлетворяются три уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ &\varphi(x, y) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

с тремя неизвестными x, y, λ. Из этих уравнений определяем x, y, λ. Множитель λ играл вспомогательную роль, и в дальнейшем он нам не требуется.

Уравнения (6) являются необходимыми условиями условною экстремума, т.е. в точках экстремума удовлетворяются уравнения (6). Но не при всяких x и y (и λ), удовлетворяющих уравнениям (6), будет иметь место условный экстремум. Требуется дополнительное исследование характера критической точки.

Левые части уравнений (6) являются частными производными функции

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y) \tag{7}$$

по переменным x, y, λ.

Таким образом, для того чтобы найти значения x и y удовлетворяющие условию (2), при которых функция $u=f(x,y)$ может иметь условный минимум или условный максимум, нужно составить вспомогательную функцию (7), приравнять нулю ее производные по x, y и λ, и из полученных трех уравнений (6) определить искомые x, y и λ. Рассмотренный метод распространяется на исследование условного экстремума функции любого числа переменных.

Пусть требуется найти максимумы и минимумы функции n переменных$u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при условии, что переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ связаны ($m<n$) уравнениями:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0\\ \varphi_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varphi_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0\end{array}\right\} \tag{8}$$

Для нахождения значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при которых могут быть условные максимумы и минимумы, нужно составить функцию

$$\begin{array}{l}F(x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_n)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)+\lambda_1\varphi_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)+\\ +\lambda_2\varphi_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)+\ldots+\lambda_m\varphi_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)\end{array},$$

приравнять нулю ее частные производные по $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+\ldots+\lambda_m\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_1}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}+\lambda_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}+\ldots+\lambda_m\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_2}=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}+\lambda_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}+\ldots+\lambda_m\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_n}=0\end{array}\right\} \tag{9}$$

и из $m+n$ уравнений (8) и (9) определить $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и вспомогательные неизвестные $\lambda_1,\lambda_2, \ldots,\lambda_n$. Так же, как и для функции двух переменных, вопрос о том, будет ли при найденных значениях переменных функция иметь максимум или минимум, или не будет иметь ни того ни другого, остается открытым. Во многих практических задачах представляется возможным, исходя из вспомогательных соображений, определить, максимум или минимум будет в найденной точке.

3. Оптимизация прочности сцепления покрытия с основой при заданной пористости покрытия

Будем решать задачу об отыскании режимов центробежной наплавки покрытий [3–4], обеспечивающих получение максимальной адгезионной прочности при заданной пористости покрытия.

Как показано в работах[4–6], средняя пористость покрытия $\overline{\Pi}$ в зависимости от технологических режимов определяется выражением:

$$\overline{\Pi}=\frac{m\Pi_0}{N^m\left(R_1^2-R_0^2\right)}\gamma\left[m,N\left(R_1^2-R_0^2\right)^{\frac{1}{m}}\right]. \tag{10}$$

Прочность сцепления $\sigma_{сц}$ (адгезионная прочность) связана с прочностью соединения материалов покрытия и подложки в зоне контакта σ с соотношением:

$$\sigma_{сц} = \sigma_c S_{отн}\,. \tag{11}$$

Относительная площадь контакта порошкового слоя с подложкой $S_{отн}$ определяется выражением:

$$S_{отн} = \left\{1 - \exp\left[-\pi\left(\frac{2}{m}+1\right)^2 \frac{3\sqrt{3}}{8}\pi R\left(\frac{2\sqrt{3}R^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{m}} \int_0^t \left(\frac{P}{B}\right)^{\frac{1}{m}} dt\right]\right\}^{\frac{m}{m+2}}. \tag{12}$$

Здесь:

$$N(\omega,t) = \left[\frac{3}{8}\frac{\omega^2(1-\Pi_0)\rho_к}{A_0}\right]^{\frac{1}{m}} \frac{t^{1-\frac{в}{m}}}{1-\frac{в}{m}}, \tag{13}$$

$$B(t) = 2^{-m} 3^{\frac{3-m}{2}} A_0 t^{в}, \tag{14}$$

$$P = \frac{\omega^2 M}{2\pi\ell(3\Pi_0+4)}. \tag{15}$$

В приведенных формулах используются обозначения, принятые в предыдущих отчетах по данному заданию.

Задачу решаем с помощью неопределенных множителей Лагранжа, для чего составляем вспомогательную функцию $F(\omega,t,\lambda)$, которая с учетом (10) и (12) может быть представлена в виде:

$$F(\omega,t,\lambda) = y_1 + \lambda\left(y_2 - \overline{\Pi}_i\right), \tag{16}$$

где

$$y_1 = \ln\left(1 - S_{отн}^{\frac{m+2}{2}}\right) = K\frac{t^{1-\frac{в}{m}}}{1-\frac{в}{m}}\omega\frac{2}{m}, \tag{17}$$

$$y_2 = \overline{\Pi} = \frac{m\Pi_0}{N^m\left(R_1^2 - R_0^2\right)}\gamma\left[m, N\left(R_1^2 - R_0^2\right)^{\frac{1}{m}}\right], \tag{18}$$

$$\rho = \frac{M}{2\pi\ell(3\theta_0+4)}, \tag{20}$$

$$K=\alpha\beta^{\frac{1}{m}}\delta^{-\frac{1}{m}}, \tag{19}$$

$$\delta=2^{-m}3^{\frac{3-m}{2}}A_0. \tag{21}$$

Заданная пористость покрытия $\overline{\Pi}_i$ определяется следующим рядом ее значений: $\overline{\Pi}_1=0{,}03$; $\overline{\Pi}_2=0{,}04$; $\overline{\Pi}_3=0{,}05$.

Формулу (16) с учетом (17) и (18) запишем в следующем виде:

$$F(\omega,t,\lambda)=K\frac{t^{1-\frac{в}{m}}}{1-\frac{в}{m}}\omega^{\frac{2}{m}}+\lambda\frac{m\Pi_0}{R_1{}^2-R_0{}^2}\frac{1}{N(\omega,t)}\gamma\left[m,\left(R_1{}^2-R_0{}^2\right)^{\frac{1}{m}}N(\omega,t)\right]-\lambda y_i. \tag{22}$$

Дифференцируя $F(\omega,t,\lambda)$ по ω, t и λ, и приравнивая частные производные нулю, получаем систему уравнений. Решая эту систему при заданном значении $\overline{\Pi}_i$, находим точки условных экстремумов.

Учитывая соотношение [7]

$$\frac{\partial\gamma(a,x)}{\partial x}=x^{a-1}e^{-x}, \tag{23}$$

получим следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}K\frac{t^{1-\frac{в}{m}}}{1-\frac{в}{m}}\cdot\frac{2}{m}\omega^{\frac{e}{m}-1}+\lambda\left[\frac{3}{8}\frac{(1-\Pi_0)\rho_k}{A_0}\right]^{\frac{1}{m}}\cdot\frac{2}{m}\omega^{\frac{2}{m}-1}\cdot\frac{t^{1-\frac{в}{m}}}{1-\frac{в}{m}}\cdot\frac{m\Pi_0}{R_1^2-R_0^2}\times\\ \times\left(-mN^{-m-1}\gamma\left[m,\left(R_1^2-R_0^2\right)^{\frac{1}{m}}N(\omega,t)\right]+\frac{1}{N^m}\cdot\omega^{m-1}e^{-\left(R_2-R_0^2\right)^{\frac{1}{m}}N}\right)=0\end{gathered} \tag{24}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial F}{\partial t}=K\cdot t^{-\frac{в}{m}}\cdot\omega^{\frac{2}{m}}+\lambda\left[\frac{3}{8}\frac{\omega^2(1-\Pi_0)\rho_k}{A_0}\right]^{\frac{1}{m}}\cdot t^{-\frac{в}{m}}\cdot\frac{m\Pi_0}{R_1^2-R_0^2}\times\\ \times\left(-mN^{-m-1}\cdot\gamma\left[m,\left(R_1^2-R_0^2\right)^{\frac{1}{m}}N(\omega,t)\right]+\frac{1}{N^m}\cdot\omega^{m-1}e^{-\left(R_2-R_0^2\right)^{\frac{1}{m}}N}\right)=0\end{gathered} \tag{25}$$

$$\frac{\partial F}{\partial\lambda}=\frac{m\Pi_0}{R_1^2-R_0^2}\cdot\frac{1}{N(\omega,t)^m}\cdot\gamma\left[m,\left(R_1^2-R_0^2\right)^{\frac{1}{m}}N(\omega,t)\right]-y_{20}=0. \tag{26}$$

Решение данной системы уравнений и, соответственно, нахождение оптимума прочности сцепления осуществляется с помощью ПЭВМ в программном комплексе MathCAD.

4. Заключение

В результате выполненных исследований установлена взаимозависимость параметров пористой структуры и параметров работоспособности (прочность сцепления покрытия с основой) с технологическими режимами получения покрытий методами центробежной индукционной наплавки.

Учитывая, что прочность сцепления покрытия с основой является одним из наиболее важных параметров, определяющих работоспособность втулок, приведена разработанная математическая методика оптимизации адгезионной прочности покрытий, основанная на использовании метода неопределенных множителей Лагранжа.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Спиридонов, А. А. Планирование эксперимента при исследовании и оптимизации технологических процессов. Учебное пособие / А. А. Спиридонов, А. А. Васильев.– Свердловск: Изд. УПИ им. С.М. Кирова, 1975. – 140 с.

2. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1970. – 720 с.

3. Белоцерковский, М. А. Организация производства и энергоемкость процесса получения биметаллических деталей центробежным индукционным методом / М. А. Белоцерковский, К. Е. Белявин, И. А. Сосновский, А. А. Куриленок, В. Г. Мисник, В. М. Каребо // Новые материалы и технологии: порошковая металлургия, композиционные материалы, защитные покрытия, сварка: материалы 13-й Междунар. науч. – техн. конф. (Минск, 9-11 сентября 2020 г.). Нац. акад. наук Беларуси [и др.] :редкол.: А. Ф. Ильющенко (гл. ред.) [и др.]. – Минск: Беларуская навука, 2020. – С. 467-473.

4. Белявин, К. Е. Напряженное состояние порошкового слоя при центробежной индукционной наплавке / К. Е. Белявин, И. А. Сосновский, А. А. Курилёнок // Актуальные проблемы прочности: материалы международной научной конференции, Витебск, 25-29 мая 2020 / под ред. В. В. Рубаника. – Молодечно: Типография «Победа», 2020. – С. 84-86.

5. Гафо, Ю. Н. Теоретические основы выбора технологических параметров центробежного индукционного припекания / Ю. Н. Гафо, А. А. Радченко, И. А. Сосновский // Перспективные технологии. – Витебск: Изд-во УО «ВГТУ», 2011. – Гл.16. – С. 363-396.

6. Белявин, К. Е. Теоретические положения формирования адгезионной связи между покрытием и основой / К. Е. Белявин, И. А. Сосновский, А. А. Курилёнок // Актуальные проблемы прочности: монография; под ред. В. В. Рубаника. – Молодечно: ОАО «Типография «Победа», 2020. – Гл. 5. – С. 45-57.

7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган – М.: «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 832 с.

Поступила в редколлегию 25.04.2021г.