

УДК 624.04:531.391.3

М. Н. Кирсанов, д-р физ.-мат. наук, Дай Цяо, студент,  
Национальный исследовательский университет "МЭИ", г. Москва, Россия  
Тел.+7(495)362-73-14; E-mail: c216@ya.ru

## ЗАВИСИМОСТЬ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ ПЛОСКОЙ МОДЕЛИ ФЕРМЫ МАНИПУЛЯТОРА ОТ ЧИСЛА ПАНЕЛЕЙ

*Модель представляет собой Г-образный кронштейн с произвольным числом панелей в опорной части (стойке) и консоли. Вывод формулы производится в системе компьютерной математики Maple. Получена аналитическая оценка первой частоты колебаний. Массы в статически определимой ферме распределены по узлам нижнего пояса консоли. Коэффициенты в формуле зависимости находятся как общие члены последовательности соответствующих коэффициентов в серии решений для ферм с увеличивающимся числом панелей. Отличительная особенность полученного решения по сравнению с подобными решениями, использующими оценку по Донкерлею, это высокая точность.*

**Ключевые слова:** консоль, ферма, метод Донкерлея, колебания, первая частота

M. N. Kirsanov, Dai Qiao

## DEPENDENCE OF THE NATURAL VIBRATION FREQUENCY OF THE PLANE MODEL OF THE MANIPULATOR TRUSS ON THE NUMBER OF PANELS

*The model is an G-shaped bracket with an arbitrary number of panels in the support (post) and console. The formula is derived in the Maple computer mathematics system. An analytical estimate of the first oscillation frequency of a plane model of a manipulator with an arbitrary number of panels in the console part and the rack is obtained. The mass of a statically determined truss is distributed over the nodes of the lower console chord. The coefficients in the dependency formula are found as common members of the sequence corresponding in the series of solutions for trusses with an increasing number of panels. A distinctive feature of the obtained solution in comparison with similar solutions using the Dunkerley estimate is its high accuracy.*

**Keywords:** console, truss, Dunkerley method, oscillations, first frequency

### 1. Введение

Манипуляторы, предназначенные для высокоскоростных работ, отличает динамический режим работы с высокими перегрузками и напряжениями отдельных частей. Именно поэтому легкие стержневые конструкции здесь предпочтительны. Анализ частот собственных колебаний входит в обязательную часть динамических расчетов. Первая (основная) частота собственных колебаний является одной из наиболее значимых динамических характеристик конструкции. Однако если конструкция содержит большое число элементов (в данном случае стержней), расчет системы с многими степенями свободы представляет собой сложную численную задачу. Альтернативой численным расчетам могут быть расчеты аналитические, тем более что современные системы символьной математики (Maple, Mathematica, Derive, Maxima) позволяют это делать. Ценность аналитических решений в виде конечных формул определяется их точностью, универсальностью и удобством применения.

Универсальность формулы тем выше, чем больше независимых параметров конструкции в нее входит.

В предлагаемом решении помимо линейных размеров, масс и упругих свойств материала фермы включены и два целочисленных параметра, определяющие число панелей в частях конструкции. По этим параметрам методом двойной индукции выводится искомая зависимость. Решение строится на основе методики, примененной ранее при определении статического прогиба ферм в аналитическом виде [1]. Формулы для частот колебаний балочных ферм получены в работах [2–6].

## 2. Задача о колебании системы масс

Решетка стойки фермы (рис. 1) имеет  $k$  панелей крестообразного вида по высоте. В горизонтальной консоли содержится  $n$  панелей с треугольной решеткой. По нижней части консоли в узлах распределены массы. Всего в ферме имеется  $\eta = 4(k + n) + 2$  стержней, включая четыре стержня, моделирующие неподвижные опоры. В задаче не учитываются горизонтальные смещения масс. Рассмотрены только вертикальные колебания грузов. Число степеней свободы системы в этом случае равно  $N = n$ . Схема манипулятора имеет регулярный тип с двумя целочисленными параметрами  $n$  и  $k$ . Усилия в стержнях фермы рассчитываются аналитически по программе в системе Maple [1]. Алгоритм программы использует метод вырезания узлов.

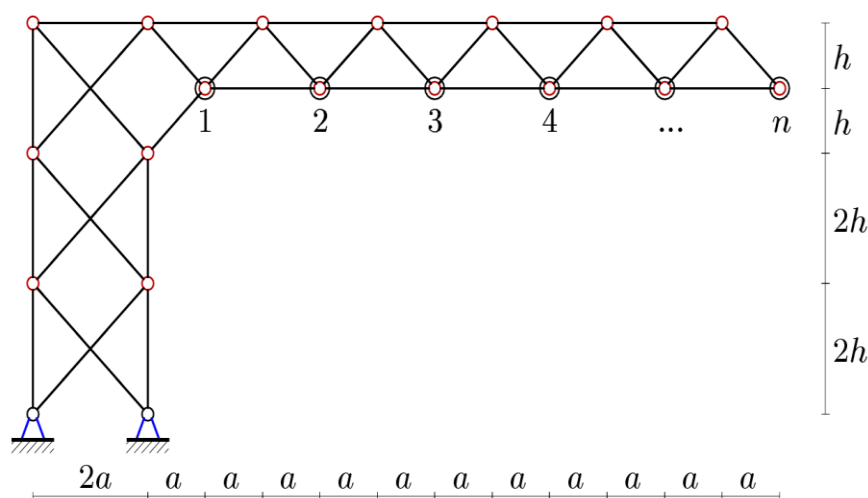


Рисунок 1. Схема манипулятора,  $k = 3, n = 4$ .

Уравнения движения масс  $m$  имеют вид:

$$m\mathbf{I}_N \ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{D}_N \mathbf{Y} = 0, \tag{1}$$

Здесь введены обозначения:  $\mathbf{D}_N$  – матрица жесткости,  $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$  – вектор вертикальных смещений грузов,  $\mathbf{I}_N$  – единичная матрица,  $\ddot{\mathbf{Y}}$  – вектор ускорений узлов с массами  $m$ . Матрица жесткости  $\mathbf{D}_N$  вычисляется как обратная к матрице податливости  $\mathbf{B}_N$ , элементы которой определяются с помощью интеграла Мора:

$$b_{i,j} = \sum_{p=1}^{n-4} S_p^{(i)} S_p^{(j)} l_p / (EF). \tag{2}$$

Здесь  $S_p^{(i)}$  – усилие в стержне с номером  $p$  от действия единичной вертикальной силы в узле  $i$ ,  $l_p$  – длина стержня,  $E$  модуль упругости материала стержней,  $F$  – площадь поперечного сечения стержней. Сечения и материал стержней предполагаются одинаковыми для всей конструкции. Четыре стержня в опорах не деформируются. В сумму (2) усилия в этих стержнях не входят.

### 3. Оценка Донкерлея

Приближенное решение по методу Донкерлея [7] для нижней оценки первой частоты колебаний  $\omega_D$  выражается через частоты колебаний отдельных грузов в отмеченных узлах:

$$\omega_D = \sqrt{1 / \sum_{p=1}^N 1 / \omega_p^2}, \quad (3)$$

где  $\omega_p$  – частота колебаний массы  $m$ , расположенной в узле консоли на нижнем поясе. В случае колебаний одной массы матричное уравнение (1) имеет скалярный вид:

$$m \ddot{y}_p + d_p y_p = 0, p=1, \dots, N,$$

где  $d_p$  – коэффициент жесткости,  $y_p$  – смещение массы,  $\ddot{y}_p$  – ускорение. Отсюда частота колебаний одного груза (парциальная частота) имеет вид:  $\omega_p = \sqrt{d_p / m}$ . Коэффициент жесткости вычисляется с помощью интеграла Мора:

$$\delta_p = 1 / d_p = \sum_{j=1}^{n-4} (\tilde{S}_j^{(p)})^2 l_j / (EF).$$

Здесь обозначено:  $\tilde{S}_j^{(p)}$  – усилия в стержне с номером  $j$  от действия единичной вертикальной силы, приложенной к узлу, где расположена масса с номером  $p$ . Из (3) следует:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{p=1}^N \delta_p = m \Delta_n. \quad (4)$$

Общий вид решения для коэффициента  $\Delta_n$  при  $k = 3$ :

$$\Delta_n = (C_{1,n} a^3 + C_{2,n} c^3 + C_{3,n} h^3) / (h^2 EF). \quad (5)$$

Решая последовательно задачу для  $n=2, 3, \dots$ , получаем:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= 2(7h^3 + 3a^3 + c^3) / (h^2 EF), \\ \Delta_3 &= (76h^3 + 51a^3 + 146c^3) / (h^2 EF), \\ \Delta_4 &= (260h^3 + 140a^3 + 328c^3) / (h^2 EF), \\ \Delta_5 &= (670h^3 + 305a^3 + 630c^3) / (h^2 EF), \\ \Delta_6 &= (1442h^3 + 570a^3 + 1084c^3) / (h^2 EF), \\ \Delta_7 &= (2744h^3 + 959a^3 + 1722c^3) / (h^2 EF), \dots \end{aligned}$$

Используя оператор **rgf\_findrecur** из специального пакета **genfunc** системы Maple, можно получить рекуррентные уравнения для элементов последовательностей. Для коэффициента  $C_1$  имеем линейное однородное уравнение пятого порядка:

$$C_{1,n} = 5C_{1,n-1} - 10C_{1,n-2} + 10C_{1,n-3} - 5C_{1,n-4} + C_{1,n-5}.$$

Оператор **rsolve** дает решение этого уравнения:

$$C_{1,n} = n(4n^3 + 4n^2 + n + 7) / 3. \quad (6)$$

Аналогично находятся и другие коэффициенты:

$$C_{2,n} = 2n(8n^2 - 6n + 19) / 3,$$

$$C_{3,n} = n(4n^2 - 10n + 11).$$
(7)

Для обобщения решения на произвольное число панелей требуется повторить все решение последовательно для различных  $k = 1, 2, \dots$ . Расчеты показывают, что от числа панелей  $k$  зависят только коэффициенты  $C_2$  и  $C_3$ . Методом индукции, используя операторы **rgf\_findrecur** и **rsolve**, получаем в общем случае:

$$C_1 = ((n-1)(n-2)(n^2 - 24n + 39)) / 3,$$

$$C_2 = n(8(k-1)n^2 + 3(1-(-1)^k - 2k)n + 6(-1)^k + 16k - 4) / 3,$$

$$C_3 = n(4kn^2 + 6(1-2k)n + 11k) / 3.$$
(8)

Отсюда, с учетом (4) и (5) получаем итоговую формулу для нижней границы первой собственной частоты колебаний фермы:

$$\omega_D = h \sqrt{\frac{EF}{C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3}}.$$
(9)

Погрешность аналитического решения (9) с коэффициентами (8) оценим из сравнения с решением задачи о колебании системы с числом степеней свободы  $N$ , полученным численно. Собственные числа матрицы  $\mathbf{B}_N$  найдем с помощью оператора **Eigenvalues** из специализированного пакета линейной алгебры **LinearAlgebra** системы Maple. На графике (рис. 2) представлены кривые зависимости первой частоты  $\omega_{num}$ , полученной численно, и  $\omega_D$  по формуле (9). Кривые практически совпадают. Принято:  $k=3$ ,  $EF=1000H$ ,  $m=100\text{кг}$ ,  $a=3\text{м}$ ,  $h=5\text{ м}$ . Уточнить характер относительной погрешности можно, проследив зависимость от числа панелей величины

$$\varepsilon = (\omega_{num} - \omega_D) / \omega_{num}.$$

Погрешность решения в зависимости от числа панелей меняется от 9 % при  $n=2$  до 1% при большом числе панелей (рис. 3). Заметна интересная особенность решения.

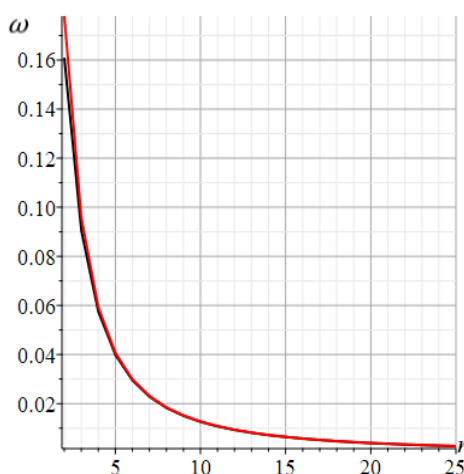


Рисунок 2. Зависимость первой частоты ( $c^{-1}$ ) от числа панелей.

Точность решения с увеличением числа панелей  $n$  сначала растет ( $\varepsilon$  уменьшается), затем падает. Минимум выражен неявно.

Полученная формула может быть использована для оценки частоты колебаний фермы при весьма большом числе стержней. Как известно, точность численного расчета с увеличением числа элементов конструкции падает, в то время как аналитическое решение при  $n > 10$  имеет практически постоянную и высокую точность.

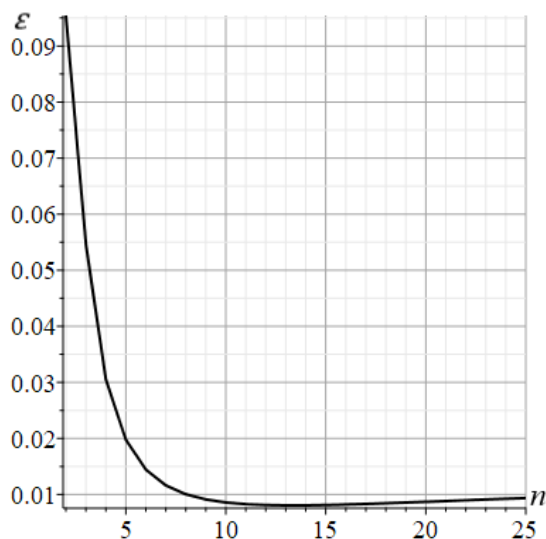


Рисунок 3. Погрешность оценки Донкерлея в зависимости от числа панелей.

Расчеты по формуле (9) показывают, что частота колебаний нелинейно зависит от высоты панели  $h$  (рис. 4). Графики построены по аналитическому решению (8) при  $k=8$  и тех же значениях масс и жесткости стержней, что и предыдущие графики. С увеличением числа  $n$  панелей в консоли максимальное значение частоты смещается на графике вправо.

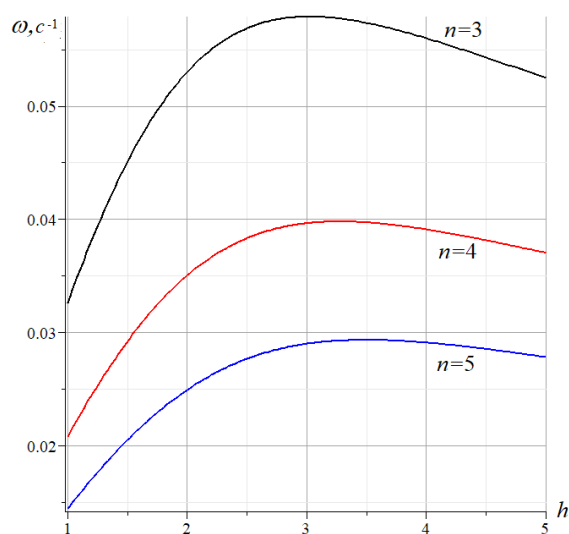


Рисунок 4. Зависимость частоты колебаний от высоты фермы.

Попытки получить верхнюю границу низшей частоты в аналитическом виде по энергетическому методу Рэлея показали, что итоговая формула оказывается слишком громоздкой для практического использования. Известно, что метод Рэлея дает большую точность, чем метод Донкерлея.

#### 4. Выводы

В задачах анализа частот колебаний конструкций метод оценки первой частоты по Донкерлею в практике применяется редко. Для систем с небольшим числом степеней свободы точность его невысока, а в случае сложных систем с многими степенями свободы для его использования необходим численный счет, и смысл применения метода Донкерлея теряется, так как численно несложно рассчитать с достаточной точностью все частоты собственных колебаний. Здесь метод индукции, используемый при выводе аналитических зависимостей для регулярных систем, и применение операторов компьютерной математики позволили получить аналитическое решение. Зависимость частоты от числа панелей, оказалось, имеет весьма компактную форму и высокую точность. Формула достаточно удобна для использования в практике, а предложенный алгоритм может быть использован в решении других аналогичных задач для статически определимых систем.

Работа выполнена в рамках проекта «Динамика легких стержневых конструкций манипуляторов» при поддержке гранта НИУ «МЭИ» на реализацию программ научных исследований «Технологии индустрии 4.0 для промышленности и робототехника» 2020-2022 гг. и междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Фундаментальные и прикладные исследования космоса».

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Кирсанов, М. Н. Плоские фермы. Схемы и расчетные формулы: справочник / М. Н. Кирсанов – М.: ИНФРА-М, 2019. – 238 с. – ISBN 978-5-16-014829-8.
2. Воробьев, О. В. О методах получения аналитического решения для проблемы собственных частот шарнирных конструкций / О. В. Воробьев // Строительная механика и конструкции. – 2020. – № 1(24). – С. 25-38.
3. Vorobev, O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss / O. Vorobev // Construction of Unique Buildings and Structures. – 2020.– Vol. 92. – Article No 9204 – doi: 10.18720/CUBS.92.4.
4. Кирсанов, М. Н. Аналитические выражения частот малых колебаний балочной фермы с произвольным числом панелей / М. Н. Кирсанов, Д. В. Тиньков // Строительная механика и конструкции. – 2019. – Т. 1. – № 20. – С. 14-20.
5. Кирсанов, М. Н. Анализ собственных частот колебаний плоской фермы с произвольным числом панелей / М. Н. Кирсанов, Д. В. Тиньков // Вестник МГСУ. – 2019. – Т.14. – № 3(126). – С. 284-292.
6. Петриченко, Е. А. Нижняя граница частоты собственных колебаний фермы Финка / Е. А. Петриченко // Строительная механика и конструкции. – 2020. – №3 (26). – С. 21-29.
7. Канатова, М. И. Частотное уравнение и анализ колебаний плоской балочной фермы / М. И. Канатова // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. – М: Инфра-М. – 2015. – Т. 1. – С. 31-34.
8. Яблонский, А. А. Курс теории колебаний / А. А. Яблонский, С. С. Норейко. – М.: Высшая школа, 1975. – 248 с.

Поступила в редколлегию 21.01.21 г.