

УДК 519.3:05.011.56:621.865.8

<sup>1</sup>А. И. Бохонский, д-р техн. наук, проф., <sup>2</sup>Н. И. Варминская, кандидат техн. наук, доцент

<sup>1</sup>Севастопольский государственный университет, г. Севастополь, Россия

<sup>2</sup>Черноморское высшее военно-морское училище имени П.С. Нахимова, г. Севастополь, Россия

Тел. +7 978 7393968; E-mail: bohon.alex@mail.ru

Тел. +7 978 8328344; E-mail: nvarminska@gmail.com

## СВОЙСТВО УПРУГОЙ СИСТЕМЫ С КРАТНЫМИ ЧАСТОТАМИ

*Исследовано оптимальное переносное движение упругого объекта с кратными частотами собственных колебаний. Показано, что управление (переносное ускорение) типа «разгон-торможение» объекта из исходного состояния абсолютного покоя в конечное состояние абсолютного покоя при известных (запроектированных) частотах обеспечивает отсутствие колебаний в конечных состояниях (по всем модам).*

**Ключевые слова:** переносное движение, оптимальное ускорение (управление), упругая система, степени свободы, кратность частот, достижение абсолютного покоя.

A. I. Bokhonsky, N. I. Varminskaya

### FEATURE OF AN ELASTIC SYSTEM WITH FREQUENCIES MULTIPLICITY

*The optimal translational motion of an elastic object with multiple frequencies of natural oscillations is investigated. It is shown that control (translational acceleration) of the "acceleration-deceleration" type of an object from the initial state of absolute quiescence to the final state of absolute quiescence with known (designed) frequencies ensures the absence of oscillations in the final state (for all oscillation modes).*

**Keywords:** translational motion, optimal acceleration (control), elastic system, degrees of freedom, frequency multiplicity, achieving absolute quiescence.

### 1. Введение

Теории колебаний линейных систем посвящена обширная литература [3–5] и другие. Решение задач управления колебаниями упругих систем, использование пассивных и активных (управляемых) динамических гасителей колебаний содержится в работах [6–11]. Для поиска решения актуальных задач техники, связанных с необходимостью снижения или полного устранения колебаний, эффективно используется классическая теория оптимального управления [12–17].

Продолжают оставаться актуальными задачи поиска управлений переносным оптимальным движением упругих систем при условии достижения абсолютного покоя в конечном состоянии.

*Цель настоящей работы* – анализ динамики упругой системы с кратными частотами (отличающимися в целое число раз) при оптимальном поступательном переносном движении с достижением абсолютного покоя в конечном положении (по всем формам колебаний).

### 2. Основное содержание и результаты работы

Дифференциальные уравнения относительного движения (колебаний) системы с двумя степенями свободы, изображенной на рисунке 1, записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (C_1 + C_2)x_1 - C_2 x_2 &= -m_1 U_e(t), \\ m_2 \ddot{x}_2 + (C_2 + C_3)x_2 - C_2 x_1 &= -m_2 U_e(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x_1, x_2$  – координаты в относительном движении;  $m_1, m_2$  – сосредоточенные массы;  $C_1, C_2, C_3$  – коэффициенты жесткости упругих элементов;  $U_e(t)$  – переносное оптимальное ускорение, например, типа «разгон-торможение».

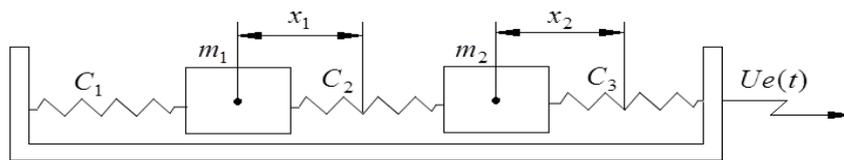


Рисунок 1. Схема движения системы

Для исследования характера движения сосредоточенных масс (с учетом всех частот собственных колебаний) с целью получения наглядности для амплитуд колебаний использована дополнительная упругая связь с коэффициентом жесткости  $C_3$ . Как показали численные эксперименты и их графическое представление, в этом случае амплитуды колебаний второй массы с учетом более высокой частоты становятся соизмеримыми с амплитудами колебаний для первого тона (для меньшей частоты собственных колебаний).

В работах [12-17] рассмотрены алгоритмы реверсионного конструирования управлений (переносных поступательных и вращательных ускорений). Например, в случае синусоидального ускорения основания  $U_e(t) = \frac{Lp^2}{2\pi} \sin(pt)$  с учетом зависимостей  $V_e(t) = \int U_e(t)dt + B_1$ ,  $S_e(t) = \int V_e(t)dt + B_1t + B_2$  и начальных условий  $V_e(0) = 0$ ,  $S_e(0) = 0$  получены выражения для скорости и перемещения:

$$V_e(t) = \frac{Lp}{2\pi} - \frac{Lp}{2\pi} \cdot \cos(pt) = \frac{Lp}{2\pi} (1 - \cos pt), \quad S_e(t) = \frac{Lp}{2\pi} (t - (1/p) \sin pt) \quad (2)$$

С учетом требования косо́й симметрии управления принято  $p = \frac{2\pi}{T}$ , где  $T$  – общее время переносного движения.

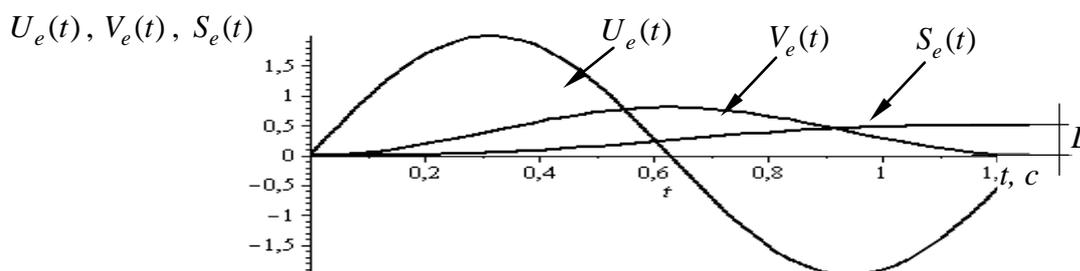


Рисунок 2. Графики переносного движения  $U_e(t), V_e(t), S_e(t)$

Если частоты собственных колебаний (их периоды) отличаются в целое число раз, то в конечном состоянии при перемещении объекта на расстояние  $L$  за время  $T$  в новое состояние абсолютного покоя исключаются колебания по всем модам. Доказательство этого утверждения иллюстрируется на примере.

Для объекта, описанного системой уравнений (1), частотный определитель равен

$$\begin{vmatrix} C_1 + C_2 - m_1\omega^2 & -C_2 \\ -C_2 & C_3 + C_2 - m_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

После раскрытия определителя получено уравнение:

$$\omega^4 - B_1\omega^2 + B_2 = 0, \quad (4)$$

где  $B_1 = \frac{(C_1 + C_2)m_2 + (C_2 + C_3)m_1}{m_1m_2}$ ,  $B_2 = \frac{C_3(C_1 + C_2) + C_1C_2}{m_1m_2}$ .

Сопряженный полином, учитывающий две задаваемые частоты, записывается так:

$$(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - (n\omega_1))^2 = 0, \quad (5)$$

где  $n$  – целое число, которое указывает во сколько раз частота второго тона больше частоты первого тона колебаний.

Из (5) следует полином:

$$\omega^4 - (n^2 + 1)\omega_1^2\omega^2 + n^2\omega_1^4 = 0. \quad (6)$$

Тождественность полиномов означает равенство коэффициентов при соответствующих степенях, что приводит к системе алгебраических уравнений:

$$(n^2 + 1)\omega_1^2 - B_1 = 0, \quad n^2\omega_1^4 - B_2 = 0. \quad (7)$$

Из системы уравнений (7) определяются коэффициенты жесткости упругих связей  $C_1$  и  $C_2$ .

Исходные данные:

$m_1 = m_2 = 10$  кг;  $C_3 = 1500$  Н/м;  $\omega_1 = 10$  с<sup>-1</sup>;  $\omega_2 = n\omega_1 = 40$  с<sup>-1</sup>;  $n = 4$ . Корнями системы (7) являются:  $C_1 = 5833,33$  Н/м;  $C_2 = 4833,33$  Н/м.

Согласно теории колебаний линейных систем, коэффициенты форм колебаний  $v_{21}, v_{22}$  (при заданных  $v_{11} = 1, v_{12} = 1$ ) найдены из зависимостей:

$$v_{21} = \frac{C_1 + C_2 - m_1\omega_1^2}{C_2}, \quad v_{22} = \frac{C_1 + C_2 - m_1n^2\omega_1^2}{C_2} \quad (8)$$

Частные решения неоднородной системы (1) ищутся в виде:  $x_1^* = H_1 \sin pt, x_2^* = H_2 \sin pt$ . После их подстановки в (1) и преобразований получена система алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} (C_1 + C_2 - m_1p^2)H_1 - C_2H_2 + \frac{m_1Lp^2}{2\pi} &= 0, \\ -C_2H_1 + (C_3 + C_2 - p^2m_2)H_2 + \frac{m_2Lp^2}{2\pi} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Для  $p = \omega_1 / 2 = 5$  и  $L = 0,5\text{м}$  найдены амплитуды вынужденных колебаний:  $H_1 = -0,0054\text{ м}$ ;  $H_2 = -0,0076\text{ м}$ . Теперь общее решение системы уравнений (1) принимает вид:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) + H_1 \sin pt, \\ x_2(t) &= A_1 v_{21} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 v_{22} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) + H_2 \sin pt, \\ \dot{x}_1(t) &= \frac{dx_1}{dt}, \quad \dot{x}_2(t) = \frac{dx_2}{dt}. \end{aligned} \quad (10)$$

При движении из состояния относительного покоя с учетом начальных условий  $x_1(0) = 0$ ;  $\dot{x}_1(0) = 0$ ;  $x_2(0) = 0$ ;  $\dot{x}_2(0) = 0$  решена система трансцендентных уравнений, неизвестные которой  $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2$ . Из этой системы получены численные значения:  $A_1 = 0,0022\text{ м}$ ,  $A_2 = 0,0013\text{ м}$ ,  $\alpha_1 = -6,2831$ ;  $\alpha_2 = 6,2831$ .

На рисунке 2 изображены графики  $U_e(t), V_e(t), S_e(t)$  переносного движения, подтверждающие достижение переносного покоя в момент времени  $t = T$  при перемещении  $S_e(T) = L$ .

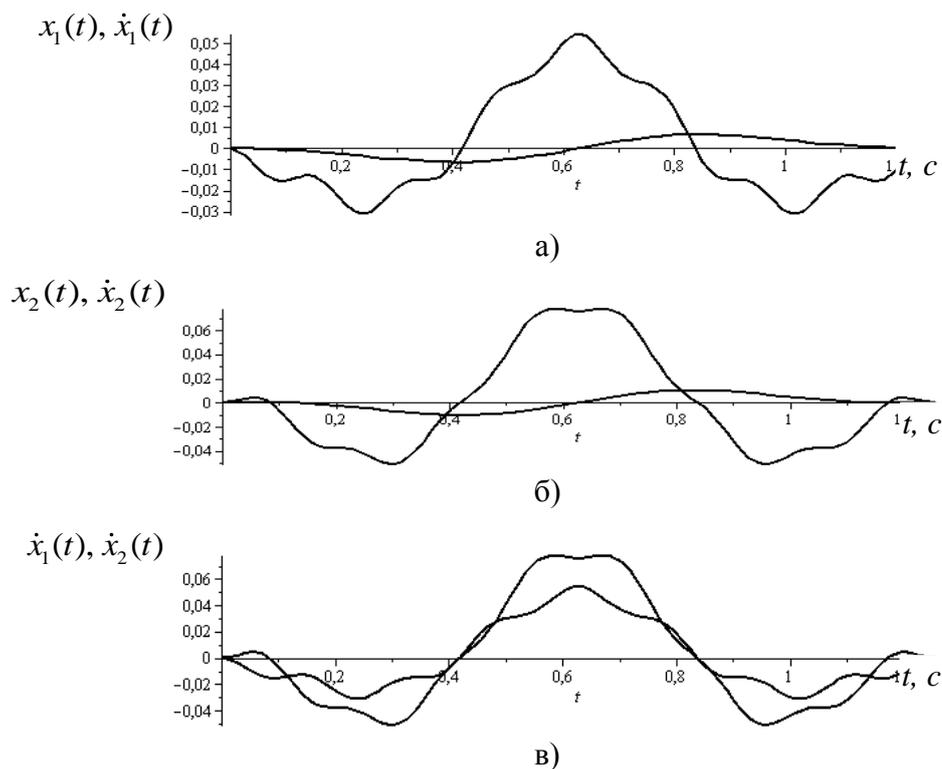


Рисунок 3. Графики относительного движения: а) движение массы  $m_1$ ; б) движение массы  $m_2$ ; в) скорости масс.

Графики относительного движения  $x_1(t), \dot{x}_1(t)$  и  $x_2(t), \dot{x}_2(t)$  (рис. 3, 4) подтверждают достижение относительного покоя, причем равенство нулю перемещений и скоростей сосредоточенных масс свидетельствует о достижении относительного покоя по первой и второй (с частотой  $\omega_2 = 40\text{ с}^{-1}, T_2 = 0,157\text{ с}$ ) модам колебаний (осуществляется восемь полных колебаний за общее время движения), и в момент  $T$  перемещение

равно нулю. Составляющая скорости с этой частотой также равна нулю в конце движения.

Итак, отметим численные значения параметров, определяющих колебательные процессы:  $\omega_1 = 10 \text{ c}^{-1}$ ;  $\omega_2 = 40 \text{ c}^{-1}$ ;  $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 0,6283 \text{ c}^{-1}$ ;  $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 0,1571 \text{ c}^{-1}$ . Общее время движения  $T = 2\pi / p = 1,2566 \text{ c}$ .

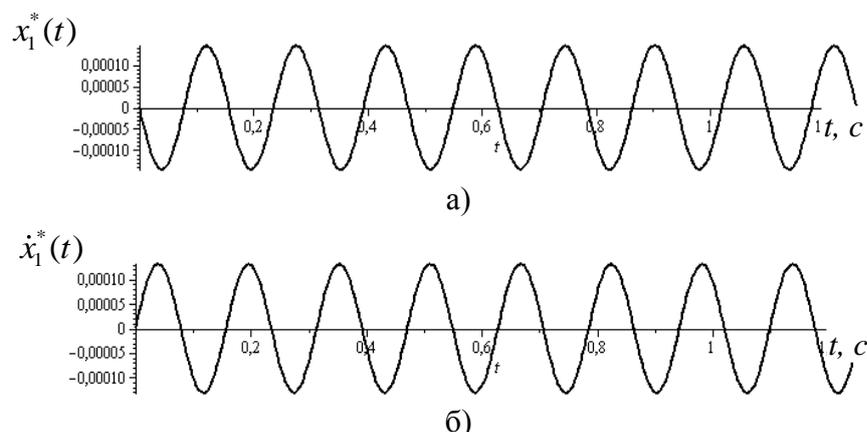


Рисунок 4. Графики составляющих движения массы  $m_1$  только с частотой второго тона.

Аналогичный результат возможен и без традиционного в классической теории колебаний линейных систем использования соотношений между амплитудами  $(V_{11}, V_{12}, V_{21}, V_{22})$ . В этом случае решение системы следует искать в виде:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + B_1 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) + H_1 \sin pt, & V_1(t) &= \dot{x}_1(t), \\ x_2(t) &= A_2 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + B_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) + H_2 \sin pt, & V_2(t) &= \dot{x}_2(t). \end{aligned} \tag{11}$$

При определении  $A_1, A_2, B_1, B_2, \alpha_1, \alpha_2$  используют уравнения (11) при  $t = 0$ , к которым дополнительно присоединена система алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} (C_1 + C_2 - m_1 \omega_1^2) A_1 - C_2 A_2 &= 0; \\ (C_1 + C_2 - m_1 \omega_2^2) B_1 - C_2 B_2 &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Полученное таким образом решение совпадает с предыдущим.

### 3. Заключение

Важным практическим свойством упругой системы с частотами, отличающимися в целое число раз (кратными), является достижение состояния абсолютного покоя в конце оптимального переносного движения по всем формам колебаний.

При проектировании крупногабаритных исполнительных органов манипуляторов минимальной массы (конечной жесткости) необходимо для устранения влияния высших форм колебаний стремиться к обеспечению кратности частот, что приводит к повышению производительности без существенного снижения точности позиционирования и дополнительных энергетических затрат на устранение колебаний упругой системы в конце движения.

## ЛИТЕРАТУРА:

1. Тимошенко, С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко. – М.: Наука, 1967. – 444 с.
2. Бидерман, В. Л. Прикладная теория механических колебаний / В. Л. Бидерман. – М.: Высш. шк., 1972. – 416 с.
3. Пановко, Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара / Я. Г. Пановко. – Л.: Машиностроение, 1976. – 320 с.
4. Бабаков, И. М. Теория колебаний / И. М. Бабаков. – М.: Изд-во «Дрофа», 1968. – 590 с.
5. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. – Т. 1. Колебания линейных систем / под ред. В. В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.
6. Красовский, Н. Н. Теория управления движением / Н. Н. Красовский. – М.: Наука, 1968. – 476 с.
7. Крутько, П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: линейные модели / П. Д. Крутько. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
8. Карновский, И. А. Методы оптимального управления колебаниями деформируемых систем / И. А. Карновский, Ю. М. Почтман. – К.: Высш. школа, 1982. – 116 с.
9. Троицкий, В.А. Оптимальные процессы колебаний механических систем / В.А. Троицкий. – Л.: Машиностроение, 1976. – 236 с.
10. Черноусько, Ф. Л. Управление колебаниями / Ф. Л. Черноусько, П. Д. Акуленко, Б. Н. Соколов. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
11. Понтрягин, Л. С. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе. – М.: Наука, 1983. – 391 с.
12. Бохонский, А. И. Энергоемкость управления перемещением объектов / А. И. Бохонский // *Фундаментальные основы механики: матер. междунар. науч.-практич. конф.* – Новокузнецк: НИЦ МС, 2017. – С. 38 – 41.
13. Бохонский, А. И. Конструирование управляемого движения объекта / А. И. Бохонский, А. И. Рыжков // *Механика, автоматика и робототехника: матер. междунар. науч.-практич. конф.* – Новокузнецк: НИЦ МС, 2017. – С. 64 – 69.
14. Бохонский, А. И. Конструирование оптимального управления движения объектов как абсолютно твердых и деформируемых тел / А. И. Бохонский, Н. И. Варминская, А. И. Рыжков // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии.* – Орел: НИЦ МС, 2016. – С. 70 – 76.
15. Бохонский, А. И. Оптимальность конструируемых управлений перемещением объектов / А. И. Бохонский, М. М. Майстришин // *Научно-технический журнал.* – Гос. университет – УНПК, 2017. – С. 31 – 38.
16. Бохонский, А. И. Реверсионный принцип оптимальности / А. И. Бохонский. – М.: Вузовский учебник; ИНФРА-М, 2016. – 174 с.
17. Бохонский, А. И. Оценка энергопотребления для оптимального управления движением объекта (Evaluation of energy consumption for the object motion optimal control / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская // *ICMTMTE IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, 2020. (<https://doi.org/10.1088/1757-899X/709/4/044093>)

Поступила в редколлегию 18.01.2021 г.