УДК 539.3, 539.374

В. Ю. Марина, д-р физ.-мат. наук, проф., **В. И. Марина,** канд. физ.-мат. наук, доцент
Технический Университет Молдовы, Молдавия
Тел./факс: +373 69954175, E-mail: marina_viorica@yahoo.com

О ПРИЧИНАХ ЗАДЕРЖКИ ТЕКУЧЕСТИ

На основе структурной модели среды с бесконечным числом подэлементов исследуются термовязкоупругие процесы нагружения. Показанно, что продолжительность обратимого состояния деформирования определяется не термовязкоупругими, а термовязкопластическими свойствами подэлементов. Данное явление следует из кинематической связанности системы подэлементов, вследствие которой, хотя процесс необратимого деформирования элемента тела начинается при нулевой макроскопической скорости в наиболее слабом подэлементе скорость необратимого деформирования больше нуля. В системе определяющих уравнений фигурируют только параметры характеризующие общее состояние элемента тела.

Ключевые слова: *определяющие уравнения, напряжения, деформации, подэлемент, параметры состояния, поликристалл.*

V. I. Marina, V. I. Marina

ABOUT THE REASONS OF A DURABILITY DELAY

On the basis of a structural model of a medium with an infinite number of subelements, thermovisco-elastic loading processes are investigated. It is shown that the duration of the reversible state of deformation is determined not by the thermoviscoelastic, but by the thermoviscoplastic properties of the sub-elements. This phenomenon follows from the kinematic connectedness of the system of subelements, as a result of which, although the process of irreversible deformation of an element of a body begins at zero macroscopic deformation rate, in the weakest subelement it is greater than zero. In the system of defining equations, only the parameters characterizing the general state of the element of the body appear.

Keywords: *governing equations, stresses, strains, sub-element, state parameters, polycrystal.*

1.Введение

Для описания процессов нагружения, в которых отклик материала существенно зависит от скорости протекания процесса деформирования и нагрева, используется процедура построения определяющих уравнений принятая в структурных моделях среды, согласно которым, макроскопический однородный элемент тела представляется в виде бесконечного числа связанных между собой подэлементов, наделённых простейшими свойствами: упругостью, вязкопластичностью, упрочнением и разупрочнением [1-4]. Несмотря на то, что подэлементы обладают только элементарными свойствами, в силу взаимодействия между ними, их совокупность даёт возможность описать свойства запаздывания скалярных и тензорных свойств при сложном нагружении, дискретная механическая память при циклическом неизотермическом нагружении по прямолинейным траекториям, запаздывания текучести и др.

2. Общие уравнения структурной модели среды

В структурных моделях среды напряжения и деформации на уровне макроэлемента полликристаллического тела, обозначают через t_{ij}, d_{ij}, а на уровне подэлемента - $\bar{t}_{ij}, \bar{d}_{ij}$. Девиаторные шаровые компоненты этих тензоров представляются в виде

$$\sigma_{ij} = t_{ij} - \frac{1}{3} t_{nn} \delta_{ij}, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \bar{t}_{ij} - \frac{1}{3} \bar{t}_{nn} \delta_{ij}, \tag{1}$$

$$\varepsilon_{ij} = d_{ij} - \frac{1}{3} d_{nn}\delta_{ij}, \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = \bar{d}_{ij} - \frac{1}{3}\bar{d}_{nn}\delta_{ij}, \tag{2}$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} t_{nn}, \quad \bar{\sigma}_0 = \frac{1}{3}\bar{t}_{nn}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3} d_{nn}, \quad \bar{\varepsilon}_0 = \frac{1}{3}\bar{d}_{nn}. \tag{3}$$

Для установления взаимосвязи между величинами на уровнях элемента тела и подэлементов используются известные соотношения Хилла [5]

$$t_{ij} = \left\langle \bar{t}_{ij} \right\rangle = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \bar{t}_{ij} dV, \tag{4}$$

$$d_{ij} = \left\langle \bar{d}_{ij} \right\rangle = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \bar{d}_{ij} dV, \tag{5}$$

$$\left\langle \bar{t}_{ij}\bar{d}_{ij} \right\rangle = \left\langle \bar{t}_{nm} \right\rangle \left\langle \bar{d}_{nm} \right\rangle = t_{pq} d_{pq}, \tag{6}$$

где $\langle . \rangle$ - знак осреднения по объёму V_0.

Уравнения (4)–(6) необходимы, но недостаточны для определения зависимости между макроскопическими напряжениями и деформациями, если заданы соотношения между напряжениями и деформациями на микроскопическом уровне. Для получения замкнутой системы уравнений необходимы дополнительные принципы, которые отражали бы явление самосогласования процессов деформирования структурных подэлементов в конгломерате. В работах [2-4] в качестве дополнительных принципов, были приняты принципы экстремума несоответствия микроскопических мер с подходящими средними значениями макроскопических аналогов, например

$$\left\langle \bar{\sigma}_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij} \right\rangle - \left\langle \bar{\sigma}_{ij} \right\rangle \left\langle \bar{\varepsilon}_{ij} \right\rangle = Extr., \tag{7}$$

и уравнений композиций

$$\left(\bar{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij}\right)\left(\bar{\varepsilon}_{ij} - \varepsilon_{ij}\right) + 3\left(\bar{\sigma}_0 - \sigma_0\right)\left(\bar{\varepsilon}_0 - \varepsilon_0\right) = 0, \tag{8}$$

$$\bar{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij} = B_{ijnm}\left(\varepsilon_{nm} - \bar{\varepsilon}_{nm}\right), \tag{9}$$

где тензор четвёртого ранга B_{ijnm} для макроскопических изотропных поликристаллов представляется в виде

$$B_{ijnm} = B I_{ijnm}, \qquad I_{ijnm} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij}\delta_{nm} + \delta_{im}\delta_{jn}\right). \tag{10}$$

На основании системы (4) – (9) можно построить, в статистическом приближении, макроскопические определяющие уравнения, если известны зависимости между микронапряжениями и деформациями.

Компоненты девиатора деформации $\bar{\varepsilon}_{ij}$ подэлемента представляются в виде суммы обратимых (упругих) $\bar{e}_{ij}$ и необратимых $\bar{p}_{ij}$ компонент

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \bar{e}_{ij} + \bar{p}_{ij}, \qquad \varepsilon_{ij} = e_{ij} + \bar{p}_{ij}, \tag{11}$$

где $\bar{e}_{ij} = \bar{\sigma}_{ij}/2G$, G - модуль сдвига общий для всех подэлементов. Упругие составляющие деформации подэлементов представляются в виде

$$\bar{e}_{ij} = \tau_{ij} + \bar{s}_{ij}. \tag{12}$$

Здесь τ_{ij} компоненты девиаторов предельных упругих деформаций подэлементов в структурно стабильном состоянии; $\bar{s}_{ij}$ - приращение компоненты девиатора предельных упругих деформаций подэлементов в результате изменения структуры при необратимом деформировании.

В качестве параметра, определяющего принадлежность величин $\tau, \bar{e}, \bar{s}$ к определённому подэлементу, выбирается вес необратимо деформированых подэлементов $\psi(0 \le \psi \le 1)$ в момент его перехода за пределы упругости при первоначальном нагружении. Предполагается далее, что τ зависит только от осредненных скоростей необратимых деформаций [2]

$$\gamma = \frac{1}{\psi'}\int_0^{\psi'} \sqrt{d\dot{\bar{p}}_{ij}\, d\dot{\bar{p}}_{ij}}\, d\psi, \tag{13}$$

и тепловой деформации ε_T. Точкой сверху обозначена производная по времени соответствующей величины; ψ'-текущий вес необратимо деформируемых подэлементов. Тогда модуль $\tau = \sqrt{\tau_{ij}\tau_{ij}}$, задаётся в виде следующей функции

$$\tau = \tau(\psi, \gamma, \varepsilon_T). \tag{14}$$

Величина $\bar{s} = \sqrt{\bar{s}_{ij}\bar{s}_{ij}}$, характеризующая упрочнения и разупрочнения материала в результате изменения его структуры, определяется соотношением типа Бейли-Орована

$$\dot{\bar{s}} = a(\bar{s} - x_0)\sqrt{\dot{\bar{p}}_{ij}\dot{\bar{p}}_{ij}} - R(\bar{s} - x_0, \varepsilon_T), \qquad (x_0 = x_0(\gamma, \varepsilon_T)), \tag{15}$$

где функции упрочнения a и разупрочнения R одни и те же для всех подэлементов, удовлетворяют условию

$$a/\bar{s} \le x_0 = const., \qquad R/\bar{s} \le x_0 = 0.$$

3. Термовязкоупругие процессы. Задержка текучести

В этих процессах все подэлементы находятся в обратимом состоянии. Поэтому $\psi' = 0$, $\dot{s} = 0$,

$$\sigma_{ij} = 2G(\gamma, v)\varepsilon_{ij}\,, \quad \sigma = 2G\varepsilon, \qquad \sigma = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}\,, \quad \varepsilon = \sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}\,, \qquad \varepsilon \le \varepsilon_{nn}(\gamma, v). \tag{16}$$

Из приведённого выражения следует, что термовязкоупругие процессы определятся двумя факторами: зависимостью модуля сдвига от параметров состояния γ, v и протяжённостью термовязкоупругого состояния элементя тела $\varepsilon_{nn}(\gamma, v)$. При этом модуль объёмной упругости K согласно выражению

$$c = \frac{3K\varepsilon_T}{T} = const.,$$

предполагается независящим от скорости деформирования и температуры T. Поэтому объёмное напряжение определяется соотношением

$$\sigma_0 = K(\varepsilon_0 - \varepsilon_T), \qquad K = const., \tag{17}$$

где по прежнему ε_0 - общее изменение объёма; ε_T - немеханическое изменение объёма (температурное, структурное и т.д.); K - объёмный модуль упругости. Вследствии этого коэффициент Пуассона v определяется по формуле

$$v(\gamma, v) = \frac{K - 2G(\gamma, v)}{2[K + G(\gamma, v)]} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{E(\gamma, v)}{K}\right). \tag{18}$$

Из приведённого выражения следует, что в процесах, в которых модуль сдвига G уменьшается, коэффициент Пуассона увеличивается. Это явление имеет широкое экспериментальное подтверждение [7].

Заметим, что продолжительность обратимого состояния по деформации определяется не термовязкоупругими свойствами, задаваемыми функцией $G = G(\gamma, v)$, а термовязкопластическими $\varepsilon_{nn} = \varepsilon_{nn}(\gamma, v)$. Данное явление следует из кинематической связанности системы подэлементов (9), которое в случае изотропной упругости подэлементов, при пропорциональном нагружении замисывается в виде

$$\bar{\sigma} - \sigma = B(\varepsilon - \bar{\varepsilon}), \tag{19}$$

или

$$\bar{e} - e = m(p - \bar{p}), \qquad m = \frac{B}{2G + B}. \tag{20}$$

Из (20) видно, что хотя процесс необратимого деформирования элемента тела начинается при нулевой макроскопической скорости деформирования $\dot{p} = 0$, в наиболее слабом подэлементе $\dot{\bar{p}} > 0$. В результате этого пределы упругости подэлементов становятся зависящими от скорости деформирования элемента тела, что, в свою очередь, приводит к изменению ε_{nn}. Таким образом, термовязкопластические свойства подэлементов благодаря непрерывности перехода материала из обратимого состояния в необратимое оказывают влияние и на термовязкоупругие характеристики материала.

Кинематическая связанность подэлементов приводит к взаимному влиянию явлений различной природы.

В упрощённом варианте из (4) и (5) следует равенства

$$e = \int_0^1 \bar{e}(\psi) d\psi , \qquad p = \int_0^1 \bar{p}(\psi) d\psi , \qquad \bar{p}(\psi \geq \psi') = 0. \tag{21}$$

Если подэлементы деформируются на линейном участке упрочнения

$$\bar{e}(\psi) = \tau(\psi, \gamma, v) + a\bar{p} , \tag{22}$$

где a - коэффициент упругости из (20)-(22) в испытаниях с $\gamma = const., v = const.$ находим выражение для веса необратимо деформированных подэлементов

$$\psi' = \frac{(a+m)\dot{p}}{\dot{e} + m\dot{p}} = \frac{a+m}{e_{,p} + m}, \qquad e_{,p} = \frac{\partial e(p, \gamma, v)}{\partial p}. \tag{23}$$

Взаимосвязь между коэффициентом упрочнения a и параметром m, характеризующим кинематическую схему соеденения подэлементов, устанавливается на основе принципа несоответствия (7) [2]

$$m = -a + \sqrt{a + a^2} . \tag{24}$$

Перейдём к установлению продолжительности процесса обратимого деформирования элемента тела. С этой целью определим момент наступления текучести, который в дальнейшем обозначим через t_1. Параметр γ в момент времени $t = t_1$ вычислим на основе (13), (23), учитывая, что $\dot{p}(t_1) = 0$ получим

$$\gamma(t_1) = \frac{\dot{e}(t_1) - \dot{e}_{nn}}{a+m} = \frac{\dot{\varepsilon}(t_1) - \varepsilon_{nn,v}\dot{v}}{a+m}, \qquad \dot{\gamma}(t_1) = 0. \tag{25}$$

Подставляя (24) в (16) получим уравнения, определяющие время наступления текучести

$$\varepsilon_{nn}\left[\frac{\dot{\varepsilon}(t_1)}{a+m}, v(t_1)\right] = \varepsilon(t_1). \tag{26}$$

Наиболее простые зависимости между $\sigma \sim \varepsilon$ получаем в случае, когда модуль сдвига от параметра γ не зависит

$$G(\gamma, v) = G(v).$$

Тогда вязкоупруги свойства $(v = const.)$ определяются только протяжённостью обратимого участка деформирования. Система (24)-(25) естественным образом отражает явление задержки текучести, которое, как отмечалось, следует из уравнения непрерывности перехода материала из обратимого состояния в необратимое. Таким образом, на основе концепции непрерывности перехода удаётся описять ряд термовязкоупругих эффектов элемента тела, наделив подэлементы только термовязкопластическими свойствами. При этом автоматически устраняется проблема границы между термовязкоупругими и термовязкопластическими свойствами материала.

Уравнения термовязкоупругих процессов

$$\sigma = 2G(\gamma, v)\varepsilon, \qquad \varepsilon \le \varepsilon_{nn}(\gamma, v), \qquad \gamma = \frac{1-\chi}{b+\chi}\left(\frac{\dot{\sigma}}{2G} + b\dot{\varepsilon}\right), \tag{27}$$

обладают всеми характерными особенностями материала в обратимой области.

При нагружении с постоянной скоростью изменения деформации $\dot{\varepsilon} = const.$ из (27) слудует $\dot{\sigma} = const.$ и наоборот, что приводит к линейной зависимости между напряжениями и деформациями в подобных испытаниях. В опытах с $\sigma = const.$ система (27) описывает ползучесть, а при $\varepsilon = const.$ релаксацию напряжения элемента тела. Каждому значению напряжения соответствует единственное равновесное значение деформации, и наоборот $G(o, v) = G_0(v)$, $\sigma = G_0\varepsilon$. Равновесное значение отклика достигается только по истечению достаточного времени. В зависимости от вида функции $G(\gamma, v)$ для достижения равновесия может потребоваться от микросекунд до очень больших промежутков времени.

4. Заключение

Показано, что явление причины задержки текучести связано с условием непрерывности перехода материала из обратимого в необратимое состояние. В следствии кинематической связанности системы подэлементов скорость необратимого деформирования в наиболее слабом подэлементе $\dot{\bar{p}} > 0$, хотя на макроскопическом уровне $\dot{p} = 0$. В результате этого пределы упругости подэлементов становятся зависящими от скорости деформирования элемента тела, что, в свою очередь, приводит к зависимости протяжённости упругого участка от условий нагружения. Таким образом, термовязкопластические свойства подэлементов благодаря непрерывности перехода материала из обратимого состояния в необратимое оказывают влияние и на термовязкоупругие характеристики материала. Кинематическая связанность подэлементов приводит к взаимному влиянию явлений различной природы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шевченко, Ю. Н. Структурная модель среды при неизотермическом процессе нагружения / Ю. Н. Шевченко, В. Ю. Марина // Прикладная механика. – 1976. – № 12. – С.12-27.

2. Марина, В. Ю. Уравнения упругопластического деформировании тел при пропорциональном неизотермическом нагружении / В. Ю. Марина. // Прикладная механика. – 1997. – Т. 33(34). – № 2. – С.9 - 17.

3. Марина, В. Ю. Исследования влияния фактора анизотропии на закономерность изменения объёма в элементах микроструктуры / В. Ю. Марина, В. И. Марина // Металлофизика и новейшие технологии. – 2017. – Т. 39. – № 3. – С. 387 – 399.

4. Марина, В. Ю. Сравнение многоэлементных моделей учитывающих неравномерность деформирования и нагружения в поликристаллических материалах / В. Ю. Марина, В. И. Марина // Прогрессивные технологии и системы машиностроения. – 2016. – № 1(52). – С. 117 – 125.

5. Хилл, Р. Об определяющих макроскопических переменных для неоднородных твёрдых тел при конечных деформациях / Р. Хилл // Механика (сб. перевод, иностр. статей). – 1973. – № 1. – С. 111-128.

6. Белл, Дж. Экспериментальные основы механики деформируемых твёрдых тел. Ч. 1 / Дж. Билл // Малые деформации. – М.: Наука, 1984. – 596 с.

Поступила в редколлегию 25.01.2019 г.