

УДК 621.833.1

<sup>1</sup> Р. М. Грубка, канд. техн. наук, доцент, А. П. Недашковский, инженер  
<sup>1</sup> А. Н. Михайлов, д-р техн. наук, проф., <sup>1</sup> И. А. Петряева, канд. техн. наук, асс.  
<sup>2</sup> А. А. Байчоров, инженер  
<sup>1</sup> ГОУВПО "Донецкий национальный технический университет",  
<sup>2</sup> ООО «Горловский энергомеханический завод», ДНР  
Тел./Факс: +38 (050) 6202396; E-mail: [tm@fimm.donntu.org](mailto:tm@fimm.donntu.org)

## СИНТЕЗ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ГЕОМЕТРИЙ ЗУБЬЕВ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КОЛЕС, РАБОТАЮЩИХ ПРИ НАЛИЧИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ И ДЕФОРМАЦИЙ ЭЛЕМЕНТОВ ПЕРЕДАЧ

*В статье представлена методология синтеза пространственных геометрий боковой поверхности зубьев цилиндрических колес в пространственном зубчатом соединении на базе цилиндрического эвольвентного зубчатого колеса. Методология предполагает выполнение ряда этапов: определение исходных данных и составление предварительной компоновки зубчатой передачи; расчет параметров контактирования зубьев; профилирование, получение картины зацепления в различных сечениях по длине зуба шестерни (зубчатой втулки); проведение одно- или многокритериальной оптимизации геометрии боковой поверхности зубьев шестерни (зубчатой втулки) и имитационное моделирование для оценки конструкции зубчатой передачи, полученной в результате выполнения расчетов.*

**Ключевые слова:** цилиндрическая зубчатая передача, пространственная геометрия, погрешности изготовления, погрешности монтажа, деформации, параметры контактирования зубьев, профилирование.

R. M. Grubka, A. P. Nedashkovskiy, A. N. Mikhaylov, I. A. Petryaeva, A. A. Baychorov

## SPATIAL GEOMETRY SYNTHESIS OF CYLINDRICAL WHEELS TEETH WORKING IN THE AVAILABILITY CONDITIONS AND DEFORMATIONS OF TRANSMISSIONS ELEMENTS

*The spatial geometries synthesis methodology of a teeth lateral surface of cylindrical wheels in a spatial gear connection on the basis of a cylindrical involute gear wheel is presented in the article. The methodology assumes the fulfillment of a number of steps: the initial data determination and the preliminary layout preparation of gear, the contacting parameters calculation of the teeth, the profiling, the production of the meshing pattern in different sections along the length of the tooth pinion (gear sleeve), the one- or multi-criteria optimization of the geometry of the gear teeth lateral surface (gear sleeve) and simulation modeling to evaluate the design of the gear transmission resulting from the calculations.*

**Keywords:** cylindrical gearing, spatial geometry, manufacturing errors, installation errors, deformations, tooth contact parameters, profiling.

### 1. Введение

К зубчатым колесам и передачам предъявляются повышенные требования по надежности, долговечности, нагрузочной способности при сохранении или уменьшении габаритных размеров. Эксплуатационные показатели зубчатых передач повышают применением более прочных конструкционных материалов, повышением точности и качества изготовления элементов зубчатых передач и совершенствованием геометрии зацепления [1]. Наиболее перспективным направлением из перечисленных - является совершенствование геометрии зацепления, которое позволяет с минимальными затратами из тех же материалов и при той же точности изготовления получить передачу с большей нагрузочной способностью.

Работоспособность зубчатых передач зависит от вида и величины перемещений, которые вызваны наличием погрешностей изготовления; погрешностей монтажа зубчатых венцов; погрешностей взаимного положения зубчатых венцов, возникающих в

© Грубка Р.М., Недашковский А. П., Михайлов А.Н., Петряева И.А., Байчоров А.А.; 2018

процессе эксплуатации вследствие деформаций элементов зубчатых передач [2, 3]. Наличие погрешностей и деформаций приводит к пространственному характеру контактирования зубьев в соединении и к необходимости синтеза пространственных геометрий боковой поверхности зубьев близких к их естественному износу в процессе эксплуатации.

Взаимодействия зубьев зубчатых колес идеализированы и при проектировании зубчатых передач не всегда учитывают комплексное действие погрешностей и деформаций элементов передач. Как следствие, в реальных условиях, при наличии погрешностей и деформаций элементов зубчатых передач контакт зубьев далек от линейного, а реальные эксплуатационные характеристики передач могут существенно отличаться от теоретических значений. Данные обстоятельства могут привести к существенному снижению нагрузочной способности передачи и снижению ее долговечности вследствие локализации нагрузки или ее неблагоприятного воздействия, что влечет за собой повышение контактных и изгибных напряжений или приводит к необходимости закладывать значительные запасы прочности в элементы зубчатых передач.

Переход к пространственному рассмотрению процессов происходящих в реальном зацеплении с учетом возникающих технологических и эксплуатационных факторов позволяет создавать зубчатые соединения, полностью соответствующие основным постулатам теории зацепления, и обладающие функционально-ориентированными, а при необходимости и изменяющимися как по длине, так и по высоте зуба эксплуатационными свойствами [4, 5]. Поэтому, для решения задач синтеза и формообразования зубчатых венцов пространственно-модифицированных зубчатых колес необходимо разрабатывать подходы по описанию боковых поверхностей зубьев и определению координат контактных точек, как при эксплуатации зубчатых колес, так и для определения точек мгновенного контакта режущего инструмента и заготовки в процессе обработки в условиях комплексного действия погрешностей и деформаций элементов зубчатых передач, что, в конечном счете, определяет актуальность представленной работы.

## **2. Основная часть**

Разработаем методологию синтеза пространственных геометрий боковой поверхности зубьев цилиндрических колес используя подход по развитию кинематического метода синтеза профиля зубьев применительно к пространственному зубчатому соединению [6] и обобщенные зависимости [7], описывающие положение и движение цилиндрических зубчатых колес в пространственном зацеплении.

Методология синтеза пространственных геометрий боковой поверхности зубьев цилиндрических колес в пространственном зубчатом соединении на базе цилиндрического эвольвентного зубчатого колеса представлена на рис. 1.

Последовательность синтеза пространственной геометрией боковой поверхности зубьев цилиндрического зубчатого колеса в пространственном зубчатом соединении на базе цилиндрического эвольвентного зубчатого колеса содержит следующие этапы:

1. Определение исходных данных (передаваемая мощность, окружная скорость, режим работы, назначение передачи, предельные габаритные размеры, требования по долговечности и надежности передачи и т.д.).

2. Разработка компоновки передачи. Определение особенностей расположения основных систем координат.

3. Расчет основных геометрических характеристик элементов передачи (число зубьев, ширина зубчатых венцов, модуль, межосевое расстояние и т.д.). Описание боковой поверхности зубьев колеса (зубчатой обоймы) в подвижной системе координат.

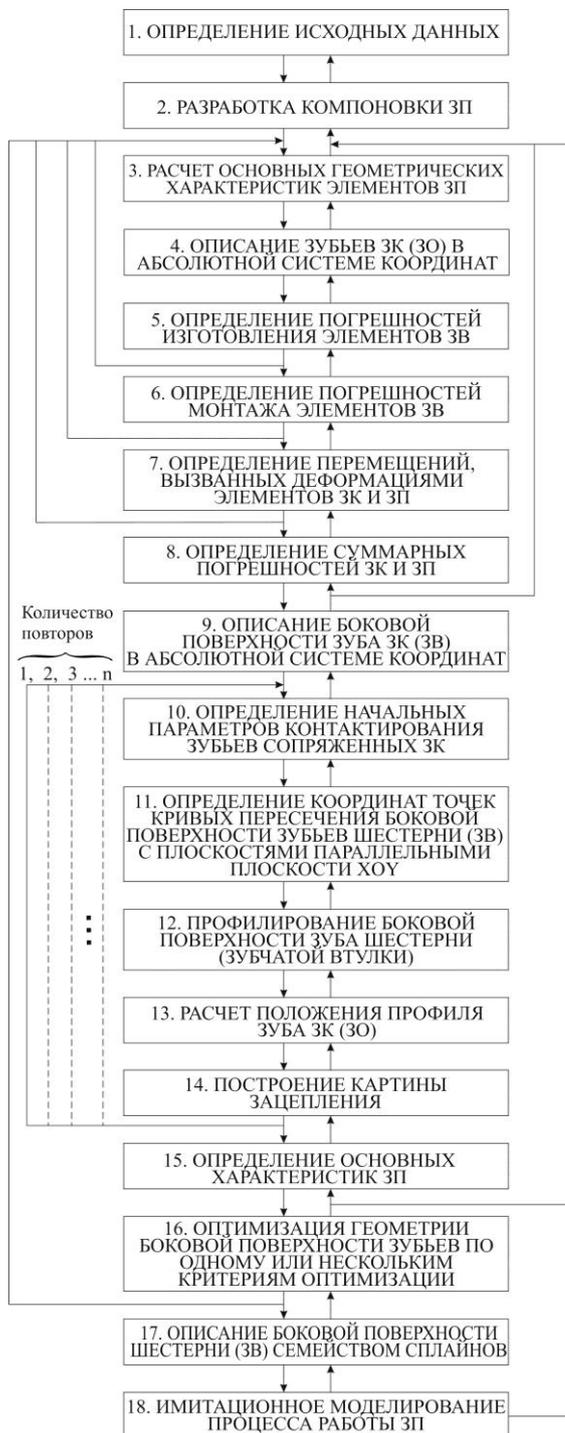


Рисунок 1. Методология синтеза зубчатых колес с пространственной геометрией боковой поверхности [7]:

боковой поверхности зубьев колеса (зубчатой обоймы) в подвижной системе координат.

Основные геометрические характеристики передачи определяются по известным из курса "Детали машин" зависимостям [8, 9]. Профиль боковой поверхности зуба колеса (зубчатой обоймы) в системе координат  $S_2(x_2, y_2)$  определяются исходя из того, что эвольвентный профиль зуба должен в начальном положении проходить через полюс зацепления:

- для левого профиля зуба:

$$\left. \begin{aligned} x_{2l} &= r_{b2} \cdot \left[ \sin(\varphi_2 + \varphi_{c\_2P}) - \right. \\ &\quad \left. - \varphi_2 \cos(\varphi_2 + \varphi_{c\_2P}) \right] \\ y_{2l} &= r_{b2} \cdot \left[ \cos(\varphi_2 + \varphi_{c\_2P}) + \right. \\ &\quad \left. + \varphi_2 \sin(\varphi_2 + \varphi_{c\_2P}) \right] \end{aligned} \right\} (1)$$

- для правого профиля зуба:

$$\left. \begin{aligned} x_{2p} &= -r_{b2} \cdot \left[ \sin(\varphi_2 + \varphi_{c\_2P}) - \right. \\ &\quad \left. - \varphi_2 \cos(\varphi_2 + \varphi_{c\_2P}) \right] \\ y_{2p} &= r_{b2} \cdot \left[ \cos(\varphi_2 + \varphi_{c\_2P}) + \right. \\ &\quad \left. + \varphi_2 \sin(\varphi_2 + \varphi_{c\_2P}) \right] \end{aligned} \right\} (2)$$

где  $r_{b2}$ - радиус основной окружности колеса (зубчатой обоймы);

$\varphi_2$ - угол развернутости эвольвентного профиля колеса (зубчатой обоймы);

$\varphi_{c\_2P}$ - угол смещения начала эвольвенты колеса (зубчатой обоймы), таким образом чтобы эвольвента проходила через полюс зацепления.

4. Описание геометрии боковой поверхности зубьев колеса (зубчатой обоймы) в абсолютной системе координат. В неподвижной абсолютной системе координат  $S(X, Y, Z)$  боковая поверхность зубьев колеса (зубчатой обоймы) может быть описана системой уравнений [7]:

$$\left. \begin{aligned} X &= x_2 \cos \phi_2 + y_2 \sin \phi_2; \\ Y &= -x_2 \sin \phi_2 + y_2 \cos \phi_2 \pm R_2; \\ Z &= z_2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

После подстановки соответствующих зависимостей для определения координат (1) или (2) получим:

- для левого профиля зуба:

$$\left. \begin{aligned} X &= r_{b2} \cdot \left[ \cos \phi_2 \left[ \sin(\varphi_2 + \varphi_{c2\_p}) - \varphi_2 \cos(\varphi_2 + \varphi_{c2\_p}) \right] + \right. \\ &+ \left. \sin \phi_2 \left[ \cos(\varphi_2 + \varphi_{c2\_p}) + \varphi_2 \sin(\varphi_2 + \varphi_{c2\_p}) \right] \right] \\ Y &= r_{b2} \cdot \left[ -\sin \phi_2 \left[ \sin(\varphi_2 + \varphi_{c2\_p}) - \varphi_2 \cos(\varphi_2 + \varphi_{c2\_p}) \right] + \right. \\ &+ \left. \cos \phi_2 \left[ \cos(\varphi_2 + \varphi_{c2\_p}) + \varphi_2 \sin(\varphi_2 + \varphi_{c2\_p}) \right] \right] \pm R_2; \\ Z &= z_2. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

- для правого профиля зуба:

$$\left. \begin{aligned} X &= r_{b2} \cdot \left[ -\cos \phi_2 \left[ \sin(\varphi_2 + \varphi_{c2\_p}) - \varphi_2 \cos(\varphi_2 + \varphi_{c2\_p}) \right] + \right. \\ &+ \left. \sin \phi_2 \left[ \cos(\varphi_2 + \varphi_{c2\_p}) + \varphi_2 \sin(\varphi_2 + \varphi_{c2\_p}) \right] \right] \\ Y &= r_{b2} \cdot \left[ \sin \phi_2 \left[ \sin(\varphi_2 + \varphi_{c2\_p}) - \varphi_2 \cos(\varphi_2 + \varphi_{c2\_p}) \right] + \right. \\ &+ \left. \cos \phi_2 \left[ \cos(\varphi_2 + \varphi_{c2\_p}) + \varphi_2 \sin(\varphi_2 + \varphi_{c2\_p}) \right] \right] \pm R_2; \\ Z &= z_2. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Угол смещения начала эвольвенты колеса (зубчатой обоймы) в полюс зацепления определяется решением системы уравнений (4) или (5), при приравнении координат  $X=0$  и  $Y=0$  в не зависимости от значения координаты  $Z$ :

$$\left. \begin{aligned} r_{b2} \cdot \left[ \cos \phi_{c\_2P} \left[ \sin(k\pi + \varphi_2) - \varphi_2 \cos(k\pi + \varphi_2) \right] + \right. \\ + \left. \sin \phi_{c\_2P} \left[ \cos(k\pi + \varphi_2) + \varphi_2 \sin(k\pi + \varphi_2) \right] \right] = 0; \\ r_{b2} \cdot \left[ -\sin \phi_{c\_2P} \left[ \sin(k\pi + \varphi_2) - \varphi_2 \cos(k\pi + \varphi_2) \right] + \right. \\ + \left. \cos \phi_{c\_2P} \left[ \cos(k\pi + \varphi_2) + \varphi_2 \sin(k\pi + \varphi_2) \right] \right] \pm R_2 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где  $k\pi$  – угол, определяющий положение полюса зацепления относительно начала системы координат зубчатого колеса (зубчатой обоймы),  $k\pi=\pi$  – для внешнего зацепления,  $k\pi=0$  – для внутреннего зацепления.

5. Определение вероятных величин погрешностей изготовления элементов зубчатых венцов [10, 11].

6. Определение вероятных величин погрешностей монтажа элементов зубчатых венцов [10, 11].

7. Определение вероятных величин перемещений, вызванных деформациями элементов зубчатых колес и зубчатых передач в процессе эксплуатации под действием рабочей нагрузки [10, 11].

8. Определение суммарных погрешностей вызванных совокупным действием погрешностей изготовления и монтажа, а так же перемещениями, возникающими вследствие деформаций элементов зубчатых колес и зубчатых передач в процессе эксплуатации под действием рабочей нагрузки [10, 11].

9. Описание боковой поверхности зуба шестерни (зубчатой втулки) в неподвижной абсолютной системе координат осуществляется обобщенными зависимостями, которые входят в систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= (m'_{11} \cos \phi_2 - m'_{12} \sin \phi_2)x_2 + (m'_{11} \sin \phi_2 + m'_{12} \cos \phi_2)y_2 + m'_{13}z_2 \pm R_2 m'_{12} + m'_{14}; \\ y_1 &= (m'_{21} \cos \phi_2 - m'_{22} \sin \phi_2)x_2 + (m'_{21} \sin \phi_2 + m'_{22} \cos \phi_2)y_2 + m'_{23}z_2 \pm R_2 m'_{22} + m'_{24}; \\ z_1 &= (m'_{31} \cos \phi_2 - m'_{32} \sin \phi_2)x_2 + (m'_{31} \sin \phi_2 + m'_{32} \cos \phi_2)y_2 + m'_{33}z_2 \pm R_2 m'_{32} + m'_{34}. \end{aligned} \right\} (7)$$

где  $m'_{ij}$  - элементы матрицы перехода от абсолютной системы координат  $S(X, Y, Z)$  к системе координат  $S_I(x_I, y_I, z_I)$  связанной с шестерней (зубчатой втулкой).

Подставив в обобщенную систему уравнений (7) зависимости (1) или (2), которые описывают геометрию боковой поверхности зуба колеса и, проведя соответствующие преобразования, получим систему уравнений, определяющую геометрию боковой поверхности зуба шестерни (зубчатой втулки) в системе координат  $S_I(x_I, y_I, z_I)$  с учетом наличия погрешностей изготовления и монтажа, а так же перемещений, возникающих в процессе эксплуатации вследствие деформаций элементов зубчатых колес и зубчатых передач, следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r_{b2} A x_1 (\sin(\varphi_2 + \phi_{c\_2P} - \phi_1 + \phi_2) - \varphi_2 \cos(\varphi_2 + \phi_{c\_2P} - \phi_1 + \phi_2)) - \\ &- A x_2 \sin \phi_1 + A x_3 z_2 + A x_0; \\ y_1 &= r_{b2} [(A y_1 + A y_2 \varphi_2) \cos(\varphi_2 + \phi_{c\_2P} - \phi_1 + \phi_2) + (A y_1 \varphi_2 - A y_2) \sin(\varphi_2 + \phi_{c\_2P} - \phi_1 + \phi_2)] + \\ &+ A y_3 \cos \phi_1 + A y_4 \sin \phi_1 - A y_5 z_2 + A y_0; \\ z_1 &= r_{b2} [(A z_1 - A z_2 \varphi_2) \cos(\varphi_2 + \phi_{c\_2P} - \phi_1 + \phi_2) + (A z_1 \varphi_2 + A z_2) \sin(\varphi_2 + \phi_{c\_2P} - \phi_1 + \phi_2)] + \\ &+ A z_3 (\cos \phi_1 - \sin \phi_1) + A z_4 z_2 + A z_0. \end{aligned} \right\} (8)$$

где

$$\begin{aligned} A x_0 &= \Delta z_\Sigma \sin \phi_{y\Sigma} - \Delta x_\Sigma \cos \phi_{y\Sigma}; \\ A x_1 &= \cos \phi_{y\Sigma} \\ A x_2 &= (R_1 \pm R_2) \cos \phi_{y\Sigma}; \\ A x_3 &= -\sin \phi_{y\Sigma}; \\ A y_0 &= -\Delta y_\Sigma \cos \phi_{x\Sigma} + \Delta z_\Sigma \cos \phi_{y\Sigma} \sin \phi_{x\Sigma} + \Delta x_\Sigma \sin \phi_{x\Sigma} \sin \phi_{y\Sigma}; \\ A y_1 &= \cos \phi_{x\Sigma}; \\ A y_2 &= \Delta x_\Sigma \sin \phi_{x\Sigma} \sin \phi_{y\Sigma} \\ A y_3 &= A y_1 (R_1 \pm R_2); \\ A y_4 &= A y_2 (R_1 \pm R_2); \\ A y_5 &= \cos \phi_{y\Sigma} \sin \phi_{x\Sigma}; \\ A z_0 &= -\Delta y_\Sigma \sin \phi_{x\Sigma} - \Delta z_\Sigma \cos \phi_{x\Sigma} \cos \phi_{y\Sigma} - \Delta x_\Sigma \cos \phi_{x\Sigma} \sin \phi_{y\Sigma}; \\ A z_1 &= \sin \phi_{x\Sigma}; \\ A z_2 &= \cos \phi_{x\Sigma} \sin \phi_{y\Sigma}; \\ A z_3 &= A z_1 (R_1 \pm R_2); \\ A z_4 &= \cos \phi_{x\Sigma} \cos \phi_{y\Sigma}. \end{aligned} \tag{9}$$

10. Определение начальных параметров контактирования зубьев сопряженных зубчатых колес.

Параметры контактирования, а именно углы поворота  $\phi_1$  шестерни (зубчатой втулки) и  $\phi_2$  колеса (зубчатой обоймы) зубчатых колес определяются решением системы уравнений (8) при заданном значении угла развернутости эвольвенты  $\varphi_2$ . Кроме па-

раметров контактирования в систему уравнений (8) входит еще три неизвестных: координаты  $x_1$  и  $y_1$  точки на боковой поверхности зуба шестерни (зубчатой втулки) и координата по длине зуба колеса  $z_2$  (зубчатой обоймы). Для раскрытия неопределенности добавим в систему уравнений (8) два дополнительных уравнения.

Первое уравнение, позволяющие определить параметры контактирования двух профилей в точке с минимальным радиусом мгновенного поворота, в зависимости от того какая передача рассматривается с внешним или с внутренним зацеплением:

- для внешнего зацепления

$$\frac{dR_{PE}^2}{d\varphi_2} = \left[ \frac{x_2(\varphi_2)\sin\phi_2}{R_2} (1 + (\cos\phi_2)^2) + \frac{y_2(\varphi_2)\cos\phi_2}{R_2} (\sin\phi_2 - 1) - 1 \right] \sin\phi_2 \frac{dx_2(\varphi_2)}{d\varphi_2} + \left[ \frac{y_2(\varphi_2)}{R_2} + \cos\phi_2 + \frac{x_2(\varphi_2)\cos\phi_2 \sin\phi_2}{R_2} (\sin\phi_2 - 1) \right] \frac{dy_2(\varphi_2)}{d\varphi_2} = 0; \quad (10)$$

- для внутреннего зацепления

$$\frac{dR_{PE}^2}{d\varphi_2} = \left[ \frac{x_2(\varphi_2)\sin\phi_2}{R_2} (1 + (\cos\phi_2)^2) + \frac{y_2(\varphi_2)\cos\phi_2}{R_2} (\sin\phi_2 - 1) \right] \sin\phi_2 \frac{dx_2(\varphi_2)}{d\varphi_2} + \left[ \frac{y_2(\varphi_2)}{R_2} - \cos\phi_2 + \frac{x_2(\varphi_2)\cos\phi_2 \sin\phi_2}{R_2} (\sin\phi_2 - 1) \right] \frac{dy_2(\varphi_2)}{d\varphi_2} = 0. \quad (11)$$

Второе уравнение – уравнение линии зацепления, которая описывается, например линейной зависимостью вида:

$$y_1 = R_1 + tg\alpha \cdot x_1.$$

В результате получим систему из пяти уравнений с пятью неизвестными, которая позволяет определять геометрию боковой поверхности зубьев шестерни (зубчатой втулки) и параметры контактирования зубчатых колес, как внешнего, так и внутреннего зацепления при наличии погрешностей изготовления и монтажа, а также при наличии перемещений, вызванных деформациями в процессе эксплуатации элементов зубчатых колес и зубчатых передач:

- для внешнего зацепления

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r_{b2}Ax_1(\sin(\varphi_2 + \phi_{c\_2P} - \phi_1 + \phi_2) - \varphi_2 \cos(\varphi_2 + \phi_{c\_2P} - \phi_1 + \phi_2)) - Ax_2 \sin\phi_1 + Ax_3z_2 + Ax_0; \\ y_1 &= r_{b2}[(Ay_1 + Ay_2\varphi_2)\cos(\varphi_2 + \phi_{c\_2P} - \phi_1 + \phi_2) + (Ay_1\varphi_2 - Ay_2)\sin(\varphi_2 + \phi_{c\_2P} - \phi_1 + \phi_2)] + Ay_3 \cos\phi_1 + Ay_4 \sin\phi_1 - Ay_5z_2 + Ay_0; \\ z_1 &= r_{b2}[(Az_1 - Az_2\varphi_2)\cos(\varphi_2 + \phi_{c\_2P} - \phi_1 + \phi_2) + (Az_1\varphi_2 + Az_2)\sin(\varphi_2 + \phi_{c\_2P} - \phi_1 + \phi_2)] + Az_3(\cos\phi_1 - \sin\phi_1) + Az_4z_2 + Az_0; \\ y_1 &= R_1 + tg\alpha \cdot x_1; \\ \left[ \frac{x_2(\varphi_2)\sin\phi_2}{R_2} (1 + (\cos\phi_2)^2) + \frac{y_2(\varphi_2)\cos\phi_2}{R_2} (\sin\phi_2 - 1) - 1 \right] \sin\phi_2 \frac{dx_2(\varphi_2)}{d\varphi_2} + \left[ \frac{y_2(\varphi_2)}{R_2} + \cos\phi_2 + \frac{x_2(\varphi_2)\cos\phi_2 \sin\phi_2}{R_2} (\sin\phi_2 - 1) \right] \frac{dy_2(\varphi_2)}{d\varphi_2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

- для внутреннего зацепления

$$\left. \begin{aligned}
 x_1 &= r_{b2} Ax_1 (\sin(\varphi_2 + \phi_{c\_2P} - \phi_1 + \phi_2) - \varphi_2 \cos(\varphi_2 + \phi_{c\_2P} - \phi_1 + \phi_2)) - \\
 &- Ax_2 \sin \phi_1 + Ax_3 z_2 + Ax_0; \\
 y_1 &= r_{b2} [(Ay_1 + Ay_2 \varphi_2) \cos(\varphi_2 + \phi_{c\_2P} - \phi_1 + \phi_2) + (Ay_1 \varphi_2 - Ay_2) \sin(\varphi_2 + \phi_{c\_2P} - \phi_1 + \phi_2)] + \\
 &+ Ay_3 \cos \phi_1 + Ay_4 \sin \phi_1 - Ay_5 z_2 + Ay_0; \\
 z_1 &= r_{b2} [(Az_1 - Az_2 \varphi_2) \cos(\varphi_2 + \phi_{c\_2P} - \phi_1 + \phi_2) + (Az_1 \varphi_2 + Az_2) \sin(\varphi_2 + \phi_{c\_2P} - \phi_1 + \phi_2)] + \\
 &+ Az_3 (\cos \phi_1 - \sin \phi_1) + Az_4 z_2 + Az_0; \\
 y_1 &= R_1 + tg \alpha \cdot x_1; \\
 &\left[ \frac{x_2(\varphi_2) \sin \phi_2}{R_2} (1 + (\cos \phi_2)^2) + \frac{y_2(\varphi_2) \cos \phi_2}{R_2} (\sin \phi_2 - 1) \right] \sin \phi_2 \frac{dx_2(\varphi_2)}{d\varphi_2} + \\
 &+ \left[ \frac{y_2(\varphi_2)}{R_2} - \cos \phi_2 + \frac{x_2(\varphi_2) \cos \phi_2 \sin \phi_2}{R_2} (\sin \phi_2 - 1) \right] \frac{dy_2(\varphi_2)}{d\varphi_2} = 0.
 \end{aligned} \right\} (13)$$

Системы уравнений (12) и (13) используются для определения начальных параметров контактирования двух сопряженных зубчатых колес при  $z_1=0$ . В результате решения систем уравнений (12) и (13) определяются координаты точек пересечения двух сопряженных профилей зубчатого колеса и шестерни с проекцией линии зацепления на плоскость  $XOY$  абсолютной системы координат, координата по длине зуба колеса (зубчатой обоймы) и углы поворота шестерни и колеса. В результате решения системы уравнений можно также определить параметры контактирования сопряженных профилей в полюсе зацепления.

11. Определение координат точек пересечения боковой поверхности зубьев шестерни (зубчатой втулки) с плоскостями параллельными плоскости  $XOY$  абсолютной системы координат.

Координаты точек пересечения боковой поверхности зубьев шестерни (зубчатой втулки) с плоскостями параллельными плоскости  $XOY$  абсолютной системы координат определяются с использованием системы уравнений (8), а также зависимости (9) и найденных ранее начальных параметров контактирования – углов поворота зубчатых колес  $\phi_1$  и  $\phi_2$ . В результате решения систем уравнений получаем массив координат точек пересечения боковой поверхности зуба шестерни с проекцией линии зацепления на плоскость  $XOY$  абсолютной системы координат. Точки лежат в плоскостях параллельных плоскости  $XOY$  абсолютной системы координат и располагаются по высоте зуба.

12. Профилирование боковой поверхности зуба шестерни (зубчатой втулки).

Для получения геометрии боковой поверхности зуба шестерни (зубчатой втулки) необходимо выполнить профилирование – т.е. привести все точки к одному положению зуба. Выполнить приведение координат точек можно при осуществлении поворота точки относительно продольной оси шестерни (зубчатой втулки), координата  $z_1$  при этом не изменяется, а координаты  $x_1$  и  $y_1$  рассчитываются с учетом ранее найденных параметров контактирования – углов поворота сопряженных зубчатых колес по зависимостям:

$$\left. \begin{aligned}
 x_{101} &= x_1 \cos \phi_{102} - y_1 \sin \phi_{102}; \\
 y_{101} &= x_1 \sin \phi_{102} + y_1 \cos \phi_{102};
 \end{aligned} \right\} (14)$$

где  $\phi_{102}$  - угол поворота шестерни (зубчатой втулки), рассчитываемый по зависимости:

$$\phi_{102} = \phi_2 - \phi_{c\_2P}, \tag{15}$$

где  $\phi_{c\_2P}$  - угол поворота колеса (зубчатой обоймы) в положение, когда профиль проходит через полюс зацепления.

Результат приведения к одному положению зуба координат точек контактирования представлен на рис. 2.

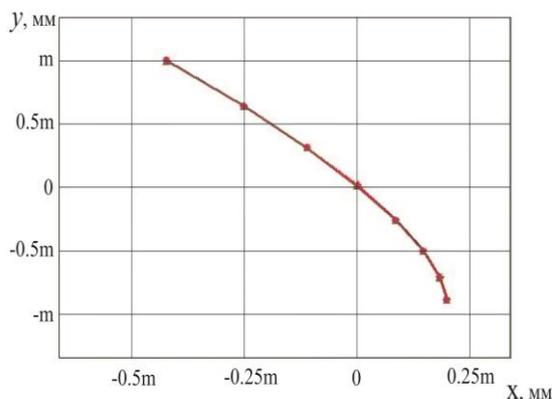


Рисунок 2. Координаты точек на боковой поверхности зуба шестерни (зубчатой втулки) приведенные к одному зубу

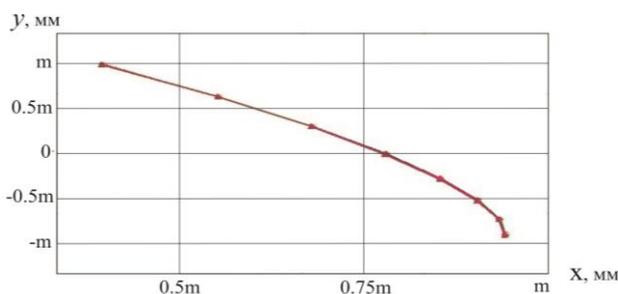


Рисунок 3. Координаты точек на боковой поверхности зуба шестерни (зубчатой втулки) приведенные к вертикальной оси

Расчет координат левого профиля шестерни (зубчатой втулки) в абсолютной системе координат:

$$\left. \begin{aligned} X_{102l} &= -x_{101\_vo} \cos(\phi_{104}) - y_{101\_vo} \sin(\phi_{104}); \\ Y_{102l} &= -x_{101\_vo} \sin(\phi_{104}) + y_{101\_vo} \cos(\phi_{104}) - R_1. \end{aligned} \right\} \tag{19}$$

Результаты расчета координат точек правого и левого профиля шестерни (зубчатой втулки) в абсолютной системе координат с учетом угла поворота соединения представлены на рис. 4.

13. Расчет положения профиля зуба колеса (зубчатой обоймы).

Для определения положения левого и правого профилей зуба колеса (зубчатой обоймы) рассчитаем угол его поворота по зависимости:

$$\phi_{201} = -\phi_2 + \phi_{c\_2P}, \tag{20}$$

Приведение координат точек боковой поверхности одного зуба к вертикальной оси осуществляется в соответствии с системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x_{101\_vo} &= x_{101} \cos(-\phi_{c2} - \phi_{c\_2P}) - \\ &- y_{101} \sin(-\phi_{c2} - \phi_{c\_2P}); \\ y_{101\_vo} &= x_{101} \sin(-\phi_{c2} - \phi_{c\_2P}) + \\ &+ y_{101} \cos(-\phi_{c2} - \phi_{c\_2P}), \end{aligned} \right\} \tag{16}$$

где  $\phi_{c2}$  - угол определяющий смещение начала эвольвенты.

Результат приведения точек боковой поверхности одного зуба к вертикальной оси представлен на рис. 3.

Расчет координат правого профиля шестерни (зубчатой втулки) в абсолютной системе координат:

$$\left. \begin{aligned} X_{102p} &= x_{101\_vo} \cos(\phi_{102}) - \\ &- y_{101\_vo} \sin(\phi_{102}); \\ Y_{102p} &= x_{101\_vo} \sin(\phi_{102}) + \\ &+ y_{101\_vo} \cos(\phi_{102}) - R_1. \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

Угол поворота левого профиля зуба шестерни (зубчатой втулки) рассчитывается по зависимости:  $\phi_{104} = \phi_2 + 2\phi_{c2} + 2\phi_{c\_2P} + 2(\phi_1 - (\pi - \phi_2))$ , (18)

Угол поворота левого профиля колеса (зубчатой обоймы) рассчитывается по зависимостям:

- для до полюсной зоны

$$\phi_{202} = \phi_{201} - 2\phi_{c\_2} - 2\phi_{c\_2P} + \frac{\phi_1 - (\pi - \phi_2)}{2}, \quad (21)$$

- для за полюсной зоны

$$\phi_{202} = \phi_{201} - 2\phi_{c\_2} - 2\phi_{c\_2P} + \phi_1 - (\pi - \phi_2). \quad (22)$$

Значение координат точек принадлежащих левому профилю колеса (зубчатой обоймы) в абсолютной системе координат определяются системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} X_{2l} &= r_{b2} [\cos \phi_{202} [\sin(k\pi + \varphi_2) - \varphi_2 \cos(k\pi + \varphi_2)] + \sin \phi_{202} [\cos(k\pi + \varphi_2) + \varphi_2 \sin(k\pi + \varphi_2)]]; \\ Y_{2l} &= r_{b2} [-\sin \phi_{202} [\sin(k\pi + \varphi_2) - \varphi_2 \cos(k\pi + \varphi_2)] + \cos \phi_{202} [\cos(k\pi + \varphi_2) + \varphi_2 \sin(k\pi + \varphi_2)]] \pm R_2. \end{aligned} \right\} (23)$$

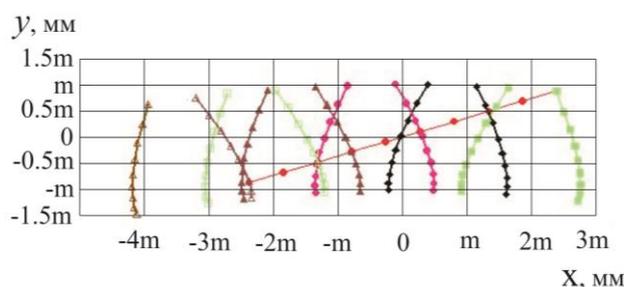


Рисунок 4. Положение левого и правого профилей зубьев шестерни (зубчатой втулки)

Значение координат точек принадлежащих правому профилю колеса (зубчатой обоймы) в абсолютной системе координат определяются системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} X_{2p} &= r_{b2} [-\cos \phi_{203} [\sin(k\pi + \varphi_2) - \varphi_2 \cos(k\pi + \varphi_2)] + \sin \phi_{203} [\cos(k\pi + \varphi_2) + \varphi_2 \sin(k\pi + \varphi_2)]]; \\ Y_{2p} &= r_{b2} [\sin \phi_{203} [\sin(k\pi + \varphi_2) - \varphi_2 \cos(k\pi + \varphi_2)] + \cos \phi_{203} [\cos(k\pi + \varphi_2) + \varphi_2 \sin(k\pi + \varphi_2)]] \pm R_2. \end{aligned} \right\} (26)$$

В результате расчета по зависимостям (23) и (26) определяем положение левого и правого профилей в пределах зоны зацепления зубьев колеса рис . 5.

#### 14. Построение картины зацепления.

По результатам расчета координат точек принадлежащих боковым поверхностям зубьев шестерни (зубчатой втулки) и колеса строим картину зацепления рис. 6.

Для получения аналогичных результатов для других сечений боковой поверхности вдоль линии зуба шестерни (зубчатой втулки) плоскостями параллельными плоскости XOY абсолютной системы координат необходимо повторить расчеты с 11 по 14 пункт представленной методологии.

15. Описание боковой поверхности зуба шестерни (зубчатой втулки) семейством сплайнов.

16. Определение основных характеристик зубчатой передачи.

17. Оптимизация геометрии боковой поверхности зубьев по одному или нескольким критериям.

18. Имитационное моделирование процесса работы зубчатой передачи.

### 3. Заключение

Таким образом, разработана методология синтеза зубчатых колес с универсальной пространственной геометрией боковой поверхности зубьев. Универсальность разработанной геометрии заключается в способности компенсировать погрешности изготовления, монтажа и перемещения, вызванные деформациями в процессе эксплуатации. Методология предполагает выполнения ряда этапов: сбор исходных данных и определение предварительной компоновки зубчатой передачи, расчет параметров контактирования зубьев, профилирование, получение картины зацепления в различных сечениях по длине зуба шестерни (зубчатой втулки), проведение одно- или многокритериальной оптимизации геометрии боковой поверхности зубьев шестерни (зубчатой втулки) и имитационное моделирование для оценки конструкции зубчатой передачи, полученной в результате выполнения расчетов.

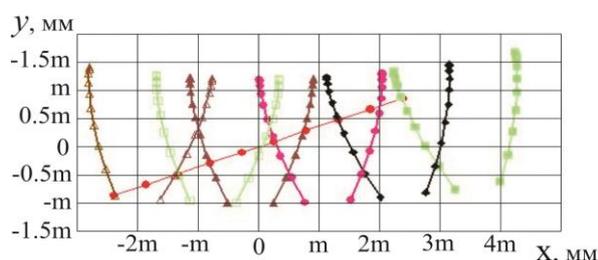


Рисунок 5. Положение левого и правого профилей зубьев колеса (зубчатой обоймы)

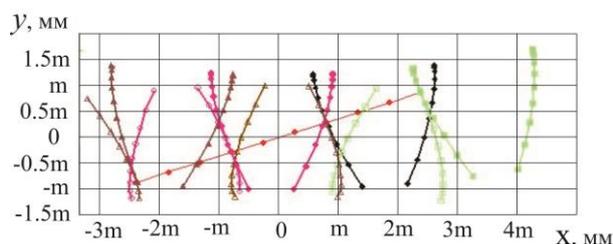


Рисунок 6. Картина внешнего зацепления зубчатого колеса с прямолинейной образующей зубьев с шестерней с пространственной геометрией на боковой поверхности зубьев в сечении плоскостью  $Z=0$

режущего инструмента, траектории его перемещения в процессе изготовления зубчатых венцов с пространственными геометриями и при выполнении сравнения во время контроля соответствия параметров реально нарезанного в процессе формообразования зубчатого венца с пространственной геометрией боковой поверхности зубьев.

Использование приведенных зависимостей позволяет определить параметры контактирования зубчатого эвольвентного колеса (зубчатой обоймы) с прямолинейной образующей и шестерни (зубчатой втулки) для условий внешнего и внутреннего зацепления. В результате выполнения профилирования боковой поверхности зуба шестерни (зубчатой втулки) по представленной методике можно получить массив данных, определяющих параметры теоретической пространственной геометрии. Полученные таким образом зависимости и теоретические значения параметров пространственной геометрии боковой поверхности зубьев шестерни (зубчатой втулки) могут быть использованы в дальнейшем при конструкторской подготовке производства, в процессе моделирования и при создании комплектов конструкторской документации. Кроме того, могут использоваться при выполнении технологических расчетов геометрии

### ЛИТЕРАТУРА

1. Бабичев, Д. Т. Основы концепции синтеза рабочих поверхностей зубьев цилиндрических передач, обладающих заданной контактной прочностью / Д. Т. Бабичев, М. Г. Сторчак, Д. А. Бабичев // Современное машиностроение. Наука и образование. – 2012. – № 2. – С. 150-160.

2. Артемов, И. И. Система комплексного обеспечения точности зубчатых колес в условиях автоматизированного производства / И. И. Артемов // СТИН. – 1998. – №6. – С. 8-13.
3. Марков, Н. Н. Проявление кинематической погрешности зубчатых колес под действием нагрузок и скоростей вращения / Н. Н. Марков, И. И. Артемов // Вестник машиностроения. – 1986. – №3. – С. 21-23.
4. Грубка, Р. М. Синтез структуры групповой пространственной геометрии зубьев втулок зубчатых муфт / Р. М. Грубка, А. Н. Михайлов // Прогрессивные технологии и системы машиностроения: Международный сборник научных трудов. — Донецк: ДонНТУ, 2004. – Вып. 27. – С. 71-75.
5. Пат. № 68689 України, F16D3/18. Зубчаста муфта / Михайлов О. М., Грубка Р. М. (Україна). – № 2003098808; заявл. 29.09.2003; опубл. 16.08.2004, Бюл. № 8. – 4 с.
6. Грубка, Р. М. Развитие кинематического метода синтеза профиля зубьев применительно к пространственному зубчатому соединению цилиндрических зубчатых колес / Р. М. Грубка // Сборник научных трудов Донбасского государственного технического университета. - Алчевск: Донбасский государственный технический университет, 2018. – Вып. 54. – С. 103-107.
7. Грубка, Р. М. Обобщенные зависимости для пространственного соединения цилиндрических зубчатых колес, учитывающие наличие погрешностей и деформаций элементов передач / Р. М. Грубка // Прогрессивные технологии и системы машиностроения: Международный сборник научных трудов. — Донецк: ДонНТУ, 2018. – Вып. 3(62). – С. 14-22.
8. Машиностроение. Энциклопедия / ред. совет: К. В. Фролов (пред.) и др. –М. : Машиностроение, 1995. – Динамика и прочность машин. Теория механизмов и машин. Т. 1-3. В 2-х кн. Кн. 2 / А. В. Александров, Н. А. Алфутов, В. В. Астанин и др. ; под общ. ред. К. С. Колесникова. – 624 с.
9. Детали машин: учебник для вузов / Л. А. Андриенко, Б. А. Байков, И. К. Ганулич [и др.]. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 520 с.
10. Грубка, Р. М. Суммарные перемещения элементов цилиндрических передач внешнего зацепления, вызванные наличием погрешностей изготовления, монтажа и деформациями в процессе эксплуатации / Р. М. Грубка, И. А. Петряева, А. Н. Михайлов // Прогрессивные технологии и системы машиностроения: Международный сборник научных трудов. – Донецк: ДонНТУ, 2018. – Вып. 1 (60). – С. 19-24.
11. Грубка, Р. М. Определение суммарных погрешностей, возникающих в процессе эксплуатации зубчатых муфт / Р. М. Грубка, А. Н. Михайлов, И. А. Петряева // Комплексные проблемы техносферной безопасности: материалы Международная научно-практическая конференция в г. Воронеж 26-28 октября 2017 г. – Воронеж: Воронежский государственный технический университет, 2017. – Ч. V. – С. 181-185.

Поступила в редколлегию 11.05.18