

НЕЛИНЕЙНЫЙ ЗАКОН ТРЕНИЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Шишканова А.А. (ЗНТУ, г. Запорожье, Украина)

Mathematical modeling of contact interaction taking into account nonlinear friction law is in investigation in technical systems. Such dependence of friction from loading is closer to real processes at contact domains than linear dependence, which is in common use, as it gives possibility to receive easier solution. Because of awkward mathematic difficulties in solving of specific real problems, there is a certain "distance" between theory and practical usage of the solutions. Clear, effective, computational convenient methods for engineering practice are developed at present work for solving the problem about pressing of single, doubly-connected punches into elastic half-space under nonlinear friction and roughness laws. The normal pressure distributions on elliptic ring contact domains, its shape, punch inclinations, penetrations accounting linear and nonlinear friction are obtained.

1. Введение

При существующих темпах развития техники важными являются повышение прочности, надежности и долговечности конструкций. Как правило, области контакта характеризуются высоким уровнем концентрации напряжений, что часто приводит к частичному или полному разрушению элементов конструкций.

Исследования в механике контактных взаимодействий связаны с необходимостью введения адекватных математических моделей, которые учитывали бы с достаточной точностью реальные механические эффекты, и со сложностью математического анализа смешанных задач теории упругости, которые формулируются в рамках принятых моделей. Важную роль при контактном взаимодействии играет трение, природа которого еще не полностью изучена.

Анализ публикаций показывает, что математическая теория решения контактных задач развита достаточно хорошо для круговых и кольцевых областей контакта [1–5]. Недостаточно исследованными остаются, например, задачи с учетом реальной геометрии контактирующих тел и сил трения, что и делает актуальной данную работу.

Наиболее часто при решении контактных задач используется закон Кулона в линейном виде [6-10]. Однако, как показали работы Ф.Боудена, Б.В.Дерягина, И.В. Крагельского, более близко реальность отображают математические модели с учетом нелинейных законов формирования сил трения. Как известно, коэффициент трения непосредственно не определяется только механическими свойствами контактирующих тел [11]. Величина его определяется такими трудно учитываемыми факторами, как отношение развивающихся в деформированном объеме напряжений, величиной деформируемого объема, свойствами пленок и др. Этот комплекс трудно учитываемых параметров предлагается в работах [11, 12] выражать биномиальной или степенной зависимостями удельной силы трения от удельного давления.

Таким образом, решение пространственных контактных задач с учетом нелинейного закона трения является важным при создании различных систем в машиностроении для учета реальных свойств поверхностей контакта.

Целью данной работы является построение решения пространственной контактной задачи о вдавливании в упругое полупространство односвязных и двусвязных жестких штампов при учете нелинейного закона трения. В качестве числовых примеров, определение характеристик контакта в случае степенной зависимости силы трения от нормального давления для конкретных задач.

2. Постановка задачи

Рассматривается задача о движении жесткого штампа по границе упругого полупространства. На штамп действует вертикальная центрально приложенная сила Q , а также горизонтальная сила T , которая приложена на расстоянии d от основания штампа (рис. 1). Сила T уравнивается силой трения. Считаем, что силы трения направлены параллельно движению по оси Ox . Действующие на штамп силы обеспечивают состояние предельного равновесия или равномерного движения. Скорость перемещения штампа много меньше скорости распространения звука в упругой среде, что позволяет пренебречь динамическими явлениями и рассматривать задачу как квазистатическую. Система координат связана с движущимся штампом.

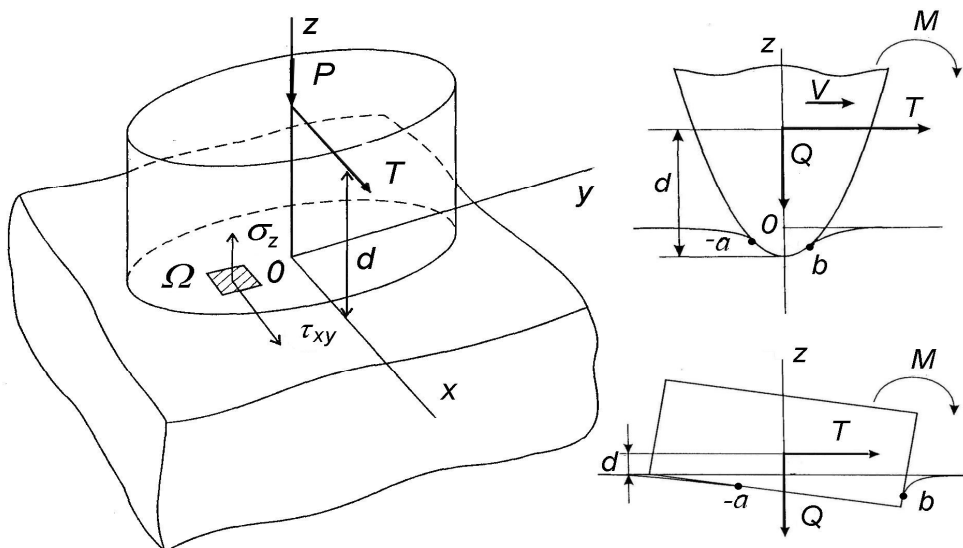


Рис. 1. Схема движения штампа по границе упругого полупространства

Под действием нагрузки штамп переместится поступательно и совершит поворот. При контакте тел с шероховатой поверхностью полные вертикальные перемещения штампа представлено, как суперпозиция перемещений точек упругого полупространства, которые вызваны приложением нормального давления, вертикальных перемещений, обусловленных действием касательной силы и дополнительных деформаций, обусловленных шероховатостью поверхности, которые имеют локальный характер и поэтому зависят только от давления, приложенного в данной точке, что предложено И.Я.Штаерманом. Такое представление приводит к двумерному интегральному уравнению краевого условия для перемещений

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(p(\rho_0, \theta_0)) + \frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint_{\Omega} \frac{p(\rho, \theta)}{r} (1 + \cos r^\wedge x \cdot \psi(p(\rho, \theta))) d\Omega = \\ = \delta - \beta_2 \rho_0 \cos \theta_0 + \beta_1 \rho_0 \sin \theta_0 - z(\rho_0, \theta_0), \end{aligned} \quad (1)$$

где (ρ, θ) – полярные координаты, E – модуль упругости полупространства, ν – коэффициент Пуассона, $r^2 = \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\theta - \theta_0)$, $(\rho_0, \theta_0) \in \Omega$, $d\Omega = \rho d\rho d\theta$, $\cos r^\wedge x = (\rho_0 \cos \theta_0 - \rho \cos \theta)/r$, $z(x, y)$ – функция, которая описывает форму основания штампа, δ – поступательное перемещение, параллельное оси Oz , β_1, β_2 – проекции вектора малого поворота. Величины δ, β_1, β_2 заранее неизвестны и определяются из уравнений равновесия штампа. Функция $\tilde{\varphi}(p(\rho, \theta))$ характеризует зависимость изменения локальных деформаций от давления, обусловленных шероховатостью поверхности полупространства. Функция $\psi(p(\rho, \theta))$ описывает закон трения. Условие вертикального перемещения точек области Ω сводится к двумерному интегральному уравнению первого рода при условиях гладкого контакта $\tilde{\varphi}(p(\rho, \theta)) = 0$. При отсутствии трения – $\psi(p(\rho, \theta)) = 0$.

Задача о равномерном движении штампа по границе упругого полупространства при нелинейном законе трения сводится к решению системы уравнений равновесия и основного интегрального уравнения (1).

3. Основное содержание и результаты работы

Под влиянием горизонтальной силы T и сил трения давление по площадке контакта распределяется несимметрично. Для решения несимметричных задач возникает необходимость вычисления потенциалов простого слоя для кольца D , когда плотность не имеет круговой симметрии.

Получено разложения потенциала простого слоя, с несимметричной плотностью [4], которая удовлетворяет условию разложения в ряд Фурье,

$$\iint_D \frac{\sigma_2(\rho) \cos 2m\theta}{r} ds = 2\pi \cos 2m\theta_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 C_{m,n} U_{2n}(\rho), \quad (2)$$

$$\text{где } C_{m,n} = \frac{2n(2n-2)\dots(2n-2m+2)(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2m-1)}{(2n+2)(2n+4)\dots(2n+2m)(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2m+1)}.$$

$$U_{2n}(\rho) = \int_a^{\rho_0} \sigma_2(\rho) (\rho/\rho_0)^{2n+1} d\rho + \int_{\rho_0}^b \sigma_2(\rho) (\rho_0/\rho)^{2n} d\rho.$$

Для этого применяются разложения по полиномам Лежандра производящей функции, использовано представление для силовой функции простого слоя, распределенного по круговому кольцу, когда точка, которую притягивают, составляет часть массы, которая притягивает. Доказательство полученного разложения (2) сделано методом математической индукции. Показано сходимость разложения потенциала (2) и на границах [4].

Уравнения границ области контакта можно записать в виде функций

$$\Gamma_1: \rho = a \cdot (1 + f_1(\varepsilon, \theta)); \quad \Gamma_2: \rho = b \cdot (1 + f_2(\varepsilon, \theta)), \quad (3)$$

Здесь $a < b$, $\varepsilon < 1$, функции $f_1(\varepsilon, \theta)$, $f_2(\varepsilon, \theta)$ – могут быть представлены рядами [3, 5]

$$f_1(\varepsilon, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i f_{i0}(\theta), \quad f_2(\varepsilon, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k f_{0k}(\theta), \quad (4)$$

коэффициенты, которых $f_{ik}(\theta)$ – непрерывные функции на $[0, 2\pi]$.

Естественно, что и искомое распределение давлений $p(\rho, \theta)$ тоже зависит от ε , поэтому разыскиваем решение уравнения (1) в виде ряда по степеням ε , коэффициенты которого внутри Ω являются непрерывными функциями, которые имеют непрерывные производные:

$$p(\rho, \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(\rho, \theta) \varepsilon^i. \quad (5)$$

Введем новые переменные R и φ , которые связаны со старыми ρ и θ зависимостями:

$$\rho = R + \frac{R-a}{b-a} b f_2(\varepsilon, \varphi) + \frac{R-b}{a-b} a f_1(\varepsilon, \varphi), \quad \theta = \varphi. \quad (6)$$

Когда $R=a$ или $R=b$ из (6) получаем соответствующие уравнения (3) границ области Ω , которая в новых переменных превращается в круговое кольцо $D: a \leq R \leq b$. Кроме того, соответственно с представлениями (4) из (6) следует, что $\rho = R$ при $\varepsilon = 0$. Для выполнения условий на границах, где нормальное давление обращается в нуль в случае неплоского основания штампа, выражение (5) представим в новых переменных [5]:

$$p(R, \varphi, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(R, \varphi) \varepsilon^i.$$

Здесь при $i=0,1,2$: $P_0(R, \varphi) = p_0(R, \varphi)$, $P_1(R, \varphi) = p_1(R, \varphi) + f_1^{(1)}(R, \varphi) \cdot R \cdot p_0'(R, \varphi)$,

$$P_2(R, \varphi) = p_2(R, \varphi) + p_1'(R, \varphi) f_1^{(1)}(R, \varphi) \cdot R + p_0'(R, \varphi) f_2^{(1)}(R, \varphi) \cdot R + \\ + \frac{p_0''(R, \varphi)}{2} \cdot [f_1^{(1)}(R, \varphi) \cdot R]^2, \quad f_i^{(1)}(R, \varphi) = \frac{1}{R} \cdot \left[\frac{R-a}{b-a} b f_{0i}(\varphi) + \frac{R-b}{a-b} a f_{i0}(\varphi) \right], \quad i=1,2.$$

Штрих обозначает производную по R .

Интеграл, который входит в уравнение (1), представим как ряд по степеням ε

$$\iint_{\Omega} \frac{p(\rho, \theta) \rho \, d\rho \, d\theta}{r} = \sum_{k=0}^{\infty} U_k \varepsilon^k. \quad (7)$$

Коэффициенты ряда (7) являются производными по параметру ε двойного интеграла со слабой особенностью, когда уравнение границ области интегрирования Ω зависят от этого параметра [5]. В связи с тем, что подынтегральная функция в (7) в точке (ρ_0, θ_0) стремится к бесконечности, при определении производных для разложения (7) сначала вырезаем эту точку из области Ω кругом малого радиуса ξ , определяем производные, а потом выполняем граничный переход при $\xi \rightarrow 0$. Получаем следующее разложение для потенциала простого слоя при отображении двусвязной области интегрирования на круговое кольцо

$$\iint_{\Omega} \frac{p(\rho(R, \varphi, \varepsilon), \varphi)}{r(R, R_0)} d\Omega = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left[\iint_D \frac{P_k(R, \varphi)}{r(R, R_0)} ds + \Phi_k(P_0, P_1, \dots, P_{k-1}) \right]. \quad (8)$$

Приведем интегро-дифференциальные операторы Φ_k для $k=0,1$, которые необходимы в первых приближениях при решении задачи:

$$\Phi_0(P_0) = 0, \quad \Phi_1(P_0) = (1 - R_0 \frac{\partial}{\partial R_0}) \iint_D \frac{P_0(R, \varphi)}{r(R, R_0)} f_1^{(1)}(R, \varphi) ds + \iint_D \frac{P_0(R, \varphi)}{r(R, R_0)} f_1^{(2)}(R, \varphi) ds,$$

где D – круговое кольцо; $r^2(R, R_0) = R^2 + R_0^2 - 2R \cdot R_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$; $(R_0, \varphi_0) \in D$, $a \leq R \leq b$, $f_i^{(2)}(R, \varphi) = \frac{1}{R} \cdot \left[\frac{ab}{b-a} f_{0i}(\varphi) + \frac{ab}{a-b} f_{i0}(\varphi) \right]$.

Неизвестные δ , β_1 , β_2 и интегралы, которые входят в уравнения равновесия, также представим в виде рядов по степеням ε . Получаем разложения, которые содержат интегральные операторы, подобные (9), которые определяются в каждом приближении через известное решение, найденное на предыдущем шаге.

В результате получена последовательность аналогичных задач для кругового кольца для определения функций, которые характеризуют распределение нормального давления под штампом в форме некругового кольца, а также заглабления, проекции векторов поворота штампа и линий, которые ограничивают область контакта.

Рассмотрим нелинейный закон трения $\psi(p(\rho, \theta))$, представляющий степенную зависимость трения от нормального давления [11, 12]

$$\tau = k\sigma^{k_1} \quad (9)$$

Обозначим $k = \varepsilon_3 \left[(1 - \nu^2) / (\pi E) \right]^{k_1 - 1}$, $(1 - \nu^2) \cdot p(\rho, \theta) / (\pi E) = P(\rho, \theta)$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 \tilde{\lambda}$, подставив в уравнение (1) получаем интегральное уравнение для определения функции $P(\rho, \theta)$

$$B_1 / (2\pi) \cdot P(\rho_0, \theta_0) + \frac{1}{2\pi b} \iint_{\Omega} \frac{1}{r} \left[P(\rho, \theta) + \varepsilon_1 P^{k_1}(\rho, \theta) \frac{\rho_0 \cos \theta_0 - \rho \cos \theta}{r} \right] d\Omega = g(\rho_0, \theta_0) + \frac{\delta + \gamma \rho_0 \cos \theta_0}{2\pi b}. \quad (10)$$

Здесь $B_1 / (2\pi) = 1 - \alpha$, $0 < \alpha < 1$ [8], $B_1 = B\pi E / ((1 - \nu^2) \cdot b)$, [6, 7], B – коэффициент, характеризующий деформационные свойства шероховатости поверхности упругого полупространства. Неизвестная постоянная γ , определяющая угол наклона штампа, находится из условия равенства моментов всех сил, действующих на штамп [6].

Уравнение (10) при $B=0$ (для гладкой поверхности) является интегральным уравнением Фредгольма первого рода со слабой особенностью. Таким образом, предлагаемый учет шероховатости упругого полупространства можно рассматривать как регуляризацию, и чем ближе значение коэффициента α к единице, тем более гладкую поверхность мы рассматриваем.

При $\alpha < 1$ данное уравнение можно решать методом последовательных приближений. Применяется также метод Н.Н.Боголюбова и Н.И.Крылова замены интегрального уравнения системой алгебраических уравнений [8]. На каждом участке разбиения области интегрирования берутся средние значения искомой функции, что дает возможность устранить особенности угловых точек. Таким образом, составлены кубатурные формулы типа Симпсона [8,9]. Кроме того, для устранения особенностей предложено введение разности значений искомой функции в разных точках и проведение последующей интерполяции слагаемых для совпадающих индексов точек [8,9].

4. Исследование числовых примеров

Графики зависимостей распределения нормального давления p/p^* , $p^* = \frac{Q}{2\pi b^2}$ под эллиптическим кольцевым плоским штампом от значения коэффициента, учитывающего деформационные свойства шероховатости упругого полупространства, изображены на рис. 2 в случае степенного закона трения (9) в сечениях $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, при значениях $\varepsilon = 0,7$, $\delta = 0,1$, $k_1 = 0,61$; $\varepsilon_1 = 0,057$; $a/b = 1/2$, $d/b = 0,3$ и $\alpha = 0,7$; $0,8$; $0,9$; $0,95$; $0,99$, соответственно.

При значении α близком к единице получаем приближенное решение задачи о вдавлении штампа без учета шероховатости. Видно, что учет шероховатости приводит к тому, что нормальные давления принимают конечные значения даже на границах контактной области плоских штампов. Увеличение значения коэффициента B_1 , учитывающего деформационные свойства шероховатости упругого полупространства, приводит к уменьшению максимальных и увеличению минимальных значений.

Как можно заметить, из того, что графики на рис.2 все пересекаются в малой окрестности двух точек, т.е. при любой шероховатости полупространства и при любом значении силы, приложенной к штампу, существуют зоны, сохраняющие приблизительно одно и то же давление. При математическом моделировании этот факт можно использовать для различных задач на отыскание зон с постоянным давлением, а также при аппроксимации решения кривыми такого семейства.

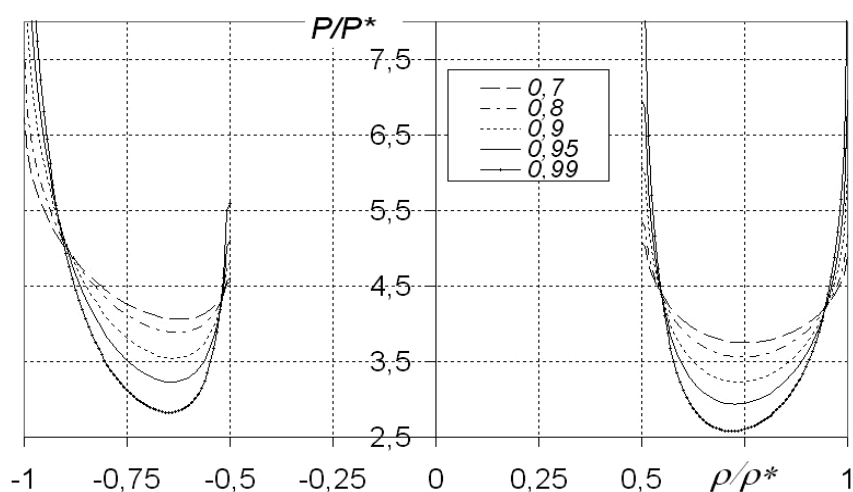


Рис. 2. Графики зависимостей распределения нормального давления от значения коэффициента шероховатости

Поверхность распределения давления p/p^* под эллиптическим кольцевым плоским штампом (рис. 3) приведена для тех же значений параметров, как и на предыдущем рисунке, кроме $k_1=0,7$; $\alpha=0,8$ в случае нелинейного закона трения (рис. 3), в случае линейного закона трения $k_1=1$ (рис. 4). Кривые равных давлений, расположенные под поверхностями давлений, показывают большую несимметричность в распределении нормальных давлений под штампом при учете степенного закона трения. Таким образом, учет степенного закона трения, по сравнению с линейным, приводит к более равномерному распределению нормального давления по области контакта.

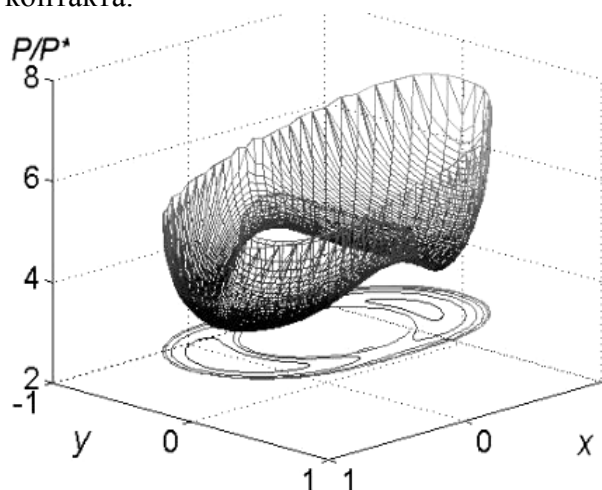


Рис. 3. Поверхность нормального давления при степенном законе трения

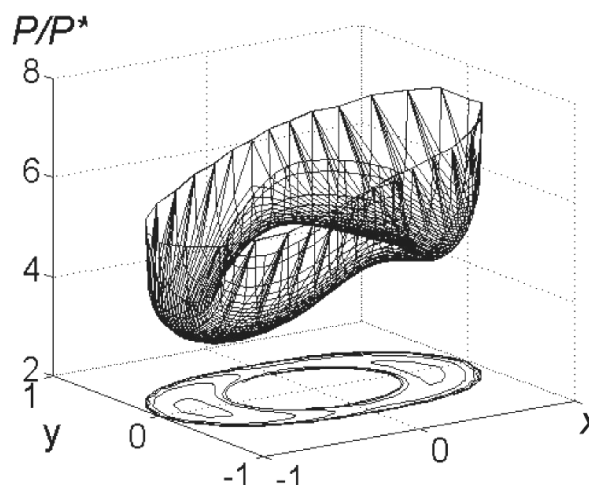


Рис. 4. Поверхность нормального давления при линейном законе трения

Увеличение высоты приложения сдвигающей силы T приводит к большей несимметричности распределения давлений, что может привести к отрыву штампа от поверхности полупространства. Для штампа в форме эллиптического кольца в плане при значении $d/b=2,2$ (рис. 5,6) появляется зона отрицательных давлений. Поверхность распределения давлений под штампом при $\varepsilon_1=0,057$; $\alpha=0,8$; $k_1=0,7$; $a/b=1/2$; $d/b=2,2$ приведена на рис. 5. Приближенные зоны положительных давлений для тех же исходных параметров изображены на рис. 6.

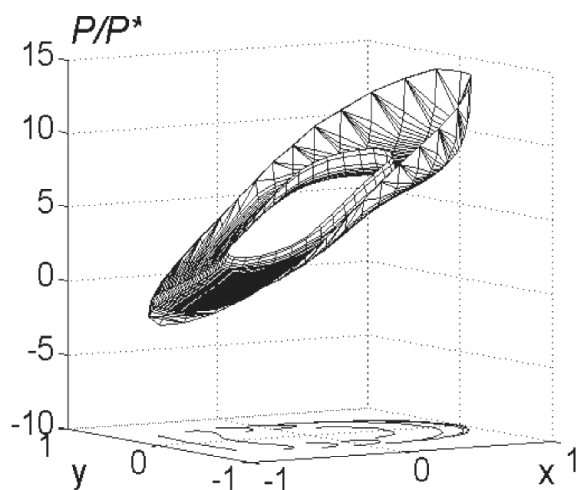


Рис. 5. Поверхность распределения нормальных давлений

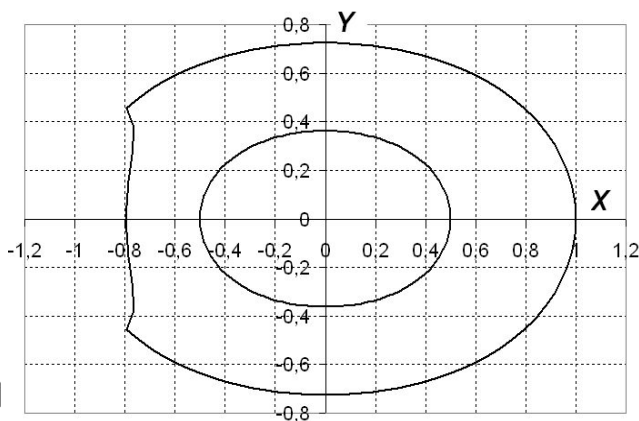


Рис. 6. Зона положительных давлений

6. Заключение

Рассмотрена задача о вдавлении штампа, с учетом нелинейного закона трения. Для решения контактных задач с учетом трения, шероховатости упругого полупространства предложен метод с использованием регуляризации интегрального уравнения, кубатурных формул, введением разности значений искомой функции в разных точках и последующей интерполяции слагаемых для устранения особенностей.

Приведены числовые примеры, подтверждающие правильность и эффективность предложенного метода решения, из которых видно, что учет степенного закона трения, по сравнению с линейным, приводит к более равномерному распределению нормального давления по области контакта. Увеличение высоты приложения горизонтальной силы, приводит к большей несимметричности распределения давлений, что может привести к отрыву штампа от поверхности упругого полупространства.

Список литературы: 1. Гузь А.Н., Рудницкий В.Б. Контактная задача о давлении упругого штампа на упругое полупространство с начальными напряжениями // Прикл. механика. 1984, т.20, №8. - С.3-11. 2. Моссаковский В.И., Качаловская Н.Е., Голикова С.С. Контактные задачи математической теории упругости. - К.: Наук. думка, 1985, - 175 с. 3. Шишканова С.Ф. О напряженном состоянии упругого пространства, ослабленного плоской трещиной близкой к кольцевой. // Прикл. математика. 1990, Т.26 - №5. - С.9-13. 4. Шишканова А.А. Приближенное решение задачи о контакте кольцевого штампа с шероховатым полупространством с использованием разложения потенциала простого слоя. // Проблемы вычисл. механики и прочности конструкций. 2003, Т.7. - С.123-133. 5. Шишканова Г.А., Зайцева Т.А. Про розвинення потенціалу простого шару для некругового кільця та його використання. Вісник ХГТУ, Херсон, 2003, №3. - С.462-466. 6. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. - М.: Наука, 2001. - 478 с. 7. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии. - М.: Машиностроение, 1988. - 256 с. 8. Шишканова А.А. Контактное взаимодействие с учетом трения и шероховатости. // Прогрессивные технологии и системы машиностроения: Межд. сб. науч. трудов. Донецк: ДонГТУ, 2004, Вып.27 – С. 300-309. 9. Шишканова А.А. О решении контактной задачи с учетом трения и шероховатости для штампа в форме двусвязного квадрата в плане // Вісник Донецького ун-ту. Серія А: Природн. науки.– 2004.– Вип. 1.– С. 95-102. 10. Guz A.N. Elastodynamic unilateral contact problems with friction for bodies with crack // Int. Appl. Mech. – 2002. – Vol. 38, № 8. – P. 895-932. 11. Крагельский И.В. Трение и износ. – М.: Машгиз, 1962.– 383 с. 12. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы расчетов на трение и износ. – М.: Машиностроение, 1977.– 576 с.

Сдано в редакцию 08.05.07

CONTROLLING THERMAL DEFORMATIONS DURING MECHANICAL SHAFTS PROCESSING

Drachov O., Taranenko V., Swic A., Halas W. (TUT, Tolliati, Russia, ITSI, Lublin University of Technology, Lublin, Poland, National College of Chelm, Poland)

This paper examines the basis of controlling the thermal deformations process during mechanical processing of long-length, low stiffness shafts. This article focuses on making manufacturing accuracy higher and keeping this accuracy during normal exploitation. This high accuracy is available through the minimization of residuary axis stress force by