

Москва. МГУДТ, М. 2001. 56 с. 6. Бахадиров Г.А. Условия втягивания материала валковой парой. Доклады АН РУз, №2, 2003г. с. 33-36.

Сдано в редакцию 07.05.07

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КАЧЕНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ С РАЗЛИЧНЫМИ УПРУГИМИ ПОСТОЯННЫМИ

Бокий И.Б. (МПТИ (ф) ЯГУ, г. Мирный, Россия)

Numeric algorithm has been worked out Program of solution contact problem of rolling cylindrical bodies has been written. Program is based on non-variation approach to reduction of a problem to system of non-linear equations in the unknown normal and shear fractions on the contact surfaces. The distribution of contact pressure for bodies with different elastic constants was analyzed.

Рассмотрим задачу стационарного качения двух упругих тел. При качении реальных тел возникает сила сопротивления перекатыванию. Одной из главных причин возникновения этой силы является относительное скольжение соприкасающихся поверхностей вследствие их деформации. Явление скольжения было описано Рейнольдсом [1]. Он качественно рассмотрел задачу качения двух тел, упругие постоянные которых различны. Но первые количественные результаты были получены лишь для тел, которые имеют одинаковые упругие постоянные. Самое первое решения задачи такого типа было получено F. Carter [2], который рассмотрел плоскую задачу качения. Если контактирующие тела изготовлены из одного материала (имеют одинаковые упругие постоянные), то размеры и форма контактного пятна, а также контактные нормальные напряжения определяются независимо от касательных контактных напряжений. То есть в этом случае контактная задача распадается как бы на две задачи – нормальную и касательную

Рассмотрение тел с различными упругими постоянными значительно усложняет задачу. Несмотря на то, что взаимодействующие тела упругие, контактная задача качения является задачей нелинейной, так как неизвестны заранее область контакта, зоны проскальзывания и сцепления. Поэтому в настоящее время для решения контактных задач применяются численные методы, которые можно разделить на две большие группы – вариационные и невариационные.

Математический аппарат численного решения касательной контактной задачи качения, то есть определение касательных контактных напряжений и зон проскальзывания и сцепления, разработан достаточно полно [3-4]. Поэтому при решении практических задач принимается допущение, что распределение нормального давления в области контакта не зависит от касательных напряжений и его можно определять по теории Герца. В данной работе рассматривается контактная задача качения в общей постановке, то есть без данного допущения. Для её решения предложен численный алгоритм, основанный на невариационном подходе. Контактная задача сводится к системе нелинейных уравнений относительно неизвестных контактных усилий [4-5]. Положительными сторонами данного подхода является то, что задача рассматривается в граничной постановке; подход позволяет уйти от оптимизационных алгоритмов, характерных вариационному подходу; неизвестные область контакта, зоны проскальзывания и сцепления определяются в процессе решения.

Рассмотрим задачу качения двух изотропных цилиндров с параллельными осями, прижатых друг к другу силой P_n . Качение происходит под действием тангенциальной силы P_t , возникающей из-за трения на поверхности соприкосновения тел.

Введем систему координат $Oxuz$, связанную с центром области контакта, которая перемещается вдоль оси Ox в положительном направлении со скоростью V , называемой скоростью качения. Оси цилиндров параллельны оси Oz . Оси Ox и Oz лежат в общей касательной плоскости, проходящей через точку начального касания тел до приложения нагрузки. Процесс перекачивания будем считать стационарным, то есть в подвижной системе координат $Oxuz$ напряженно-деформированное состояние взаимодействующих тел не меняется во времени.

Деформации и перемещения принимаются малыми, волновыми и инерционными эффектами пренебрегаем. Будем считать размеры площадки контакта намного меньше характерных размеров взаимодействующих тел, поэтому аппроксимируем каждый цилиндр упругими полуплоскостями. В дальнейшем будем рассматривать задачу качения упругого цилиндра радиуса R по упругому основанию. По площадке контакта действуют касательные контактные усилия, вызванные трением, подчиняющимся закону Кулона.

Скорости проскальзывания в точках площадки контакта при стационарном качении в безразмерной форме даются выражениями

$$\frac{v_x}{V} = \frac{v_{x1} - v_{x2}}{V} = \xi_x + \frac{\partial}{\partial x}(u_{x1} - u_{x2}), \quad (1)$$

где u_{x1} , u_{x2} ; v_{x1} , v_{x2} – упругие касательные перемещения и скорости точек взаимодействующих поверхностей; $\xi_x = (\delta V_{x1} - \delta V_{x2})/V$ – скорость одного тела относительно другого при движении их как абсолютно жестких в безразмерной форме (относительное скольжение); δV_{x1} , δV_{x2} – скорости проскальзывания.

Необходимо определить нормальные $P_y(x)$ и касательные $P_x(x)$ контактные усилия, а также площадку контакта, зоны проскальзывания и сцепления.

При этих предположениях контактная задача качения аналогично [4-5] сводится к системе нелинейных операторных уравнений:

$$\begin{cases} P_y = h(P_y - E_y D_y(P_x, P_y)), \\ P_x = q(P_x - E_x D_x(P_x, P_y), P_y); \end{cases} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} D_y &= A_{11}P_y + A_{12}P_x + f(x) + \Delta_y \\ D_x &= A_{21}P_y + A_{22}P_x + \xi(x) \end{aligned}$$

Здесь A_{ij} линейные интегральные операторы с областью интегрирования Ω , которые определяются в соответствии с решением Фламана о действии единичной силы на упругую полуплоскость и соотношения (1):

$$A_{11}P_y = -2c_1 \int_{\Omega} P_y(\zeta) \ln \frac{|x-\zeta|}{d} d\zeta - c_2 \int_{\Omega} P_y(\zeta) d\zeta,$$

$$\begin{aligned}
A_{12}P_x &= c_3 \int_{\Omega} P_y(\zeta) \text{sign}(x-\zeta) d\zeta, \\
A_{21}P_y &= -2c_3 P_y(x), \quad A_{22}P_x = -2c_1 \int_{\Omega} P_y(\zeta) \frac{d\zeta}{x-\zeta}; \\
c_1 &= \frac{1-v_1^2}{\pi E_1} + \frac{1-v_2^2}{\pi E_2}, \quad c_2 = \frac{1+v_1}{\pi E_1} + \frac{1+v_2}{\pi E_2}, \\
c_3 &= \frac{(1+v_1)(1-2v_1)}{2E_1} - \frac{(1+v_2)(1-2v_2)}{2E_2};
\end{aligned}$$

E_y, E_x – произвольные положительные функции на Ω ; $\Delta_y = \Delta_{y1} - \Delta_{y2}$ – относительное поступательное вертикальное смещение цилиндров, как жёстких целых; $f(x)$ – расстояние между телами в ненагруженном состоянии; d – глубина полуплоскости где смещения приняты равными нулю; $h(\gamma), q(\alpha, \gamma)$ – нелинейные функции действительных переменных

$$h(\gamma) = \begin{cases} \gamma, & \gamma \geq 0; \\ 0, & \gamma < 0; \end{cases} \quad q(\alpha, \gamma) = \begin{cases} \alpha, & |\alpha| \leq \mu\gamma; \\ \mu\gamma \text{sign}(\alpha), & |\alpha| > \mu\gamma; \quad \gamma \geq 0. \end{cases}$$

Данная система операторных уравнений эквивалентна классической постановке контактной задачи в виде равенств и неравенств. Искомые нормальные $P_y(x)$ и касательные $P_x(x)$ контактные усилия действуют на тело с индексом единица.

Для приближенного решения системы уравнений (2) перейдем к её дискретному аналогу. Предполагаемую площадку контакта $\Omega = [a; b]$ разобьём на N одинаковых элементов. Считаем, что на каждом элементе $[X_{i-1}; X_i]$ контактные усилия $\vec{p}_i = (p_{2i-1}, p_{2i})$, относительные перемещения и скорости точек постоянны и равны значениям в центре элементов.

При этих предположениях контактная задача качения сводится к решению следующей системы нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} p_{2i-1} = h(\gamma_i), \\ p_{2i} = q(\alpha_i, p_{2i-1}); \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $i = \overline{1, N}$;

$$\begin{aligned}
\gamma_i &= p_{2i-1} - E y_i \left(\sum_{j=1}^{2N} a_{2i-1, j} p_j + f_{2i-1}(x_i) + \Delta_y \right); \\
\alpha_i &= p_{2i} - E x_i \left(\sum_{j=1}^{2N} a_{2i, j} p_j + \xi_{2i} \right);
\end{aligned}$$

$E y_i > 0, E x_i > 0, \mu$ – коэффициент трения; a_{ij} – элементы матрицы податливости; x_i – середина i -го элемента; f_{2i-1} – расстояние между телами в середине i -го элемента до приложения нагрузки; ξ_{2i} безразмерная относительная скорость цилиндров при движении их как абсолютно жёстких в точке x_i .

Матрица податливости $A = \{a_{ij}\}_{i, j = \overline{1, 2N}}$ определяется в соответствии с выражениями для линейных операторов:

если $i \neq j$

$$a_{2i-1,2j-1} = \left(-2c_1 \ln \frac{|x_i - x_j|}{d} - c_2 \right) s,$$

$$a_{2i-1,2j} = c_3 \text{sign}(x_i - x_j) s,$$

$$a_{2i,2j-1} = 0, \quad a_{2i,2j} = \frac{-2c_1}{x_i - x_j} s;$$

если $i = j$

$$a_{2i-1,2i-1} = \left(-2c_1 \left(\ln \frac{s}{2d} - 1 \right) - c_2 \right) s,$$

$$a_{2i-1,2i} = 0, \quad a_{2i,2i-1} = -2c_3 s, \quad a_{2i,2i} = 0;$$

s – длина элемента.

Для получения решения можно предложить следующий итерационный процесс:

$$p_{2i-1}^{(n+1)} = h \left[p_{2i-1}^{(n)} - E y_i \left(\sum_{j=1}^{2N} a_{2i-1,j} p_j^{(n)} + f_{2i-1}(x_i) + \Delta y \right) \right], \quad (4)$$

$$p_{2i}^{(n+1)} = q \left[p_{2i}^{(n)} - E x_i \left(\alpha p_{2i}^{(n)} + \sum_{j=1}^{2N} a_{2i,j} p_j^{(n)} + \xi_{2i} \right) \right], p_{2i-1}^{(n+1)}.$$

Так как матрица A_{22} содержит нули на главной диагонали, то для получения сходимости итерационного процесса введен параметр регуляризации - α (при $\alpha \rightarrow 0$ мы получаем точное решение).

За начальное приближение можно взять решение задачи Герца или принять значения контактных усилий нулевыми. Предполагаемая зона контакта должна обязательно покрывать зону контакта, эту оценку несложно произвести исходя из решения нормальной задачи. В качестве критерия прекращения итерационного процесса удобно использовать среднеквадратичную разность

$$\sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2N} (p_i^{(n+1)} - p_i^{(n)})^2} \leq \varepsilon.$$

Область контакта, зоны проскальзывания и сцепления определяются из полученных значений контактных усилий исходя из условий классической постановки контактной задачи в виде равенств и неравенств: область контакта – совокупность элементов, на которых выполняется неравенство $p_{2i-1} > 0$; зона сцепления – $p_{2i} < \mu p_{2i-1}$, зона проскальзывания – $p_{2i} = \mu p_{2i-1}$.

В качестве тестового примера рассматривалась задача качения упругого цилиндра по упругому основанию с одинаковыми упругими постоянными, решение которой известно [6]. Модуль упругости цилиндра и основания равен $2 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона – 0,3; радиус цилиндра – 0,2 м. Решение получено на сетке из 161 элемента при следующих значениях параметров: $\Delta = 0,1$ мм ($P_n = 3,67$ кН), $\xi = 2 \cdot 10^{-3}$.

Параметры E_x , E_y и α задавались исходя из условий $0 \leq E_x \leq \frac{1}{\|A_{11}\|}$,

$$0 \leq E_y \leq \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \|A_{22}\|^2}.$$

На рисунке 1 приведены зависимости зоны сцепления d (L – длина области контакта) и касательной силы P_t от коэффициента трения. Коэффициент трения менялся от 0 до 1 с шагом 1/25. Полученные значения сравнивались с решением, приведённым в [6] (сплошная линия соответствует аналитическому решению, кружочки – полученному численному решению). Как видно из графиков, получено достаточно точное соответствие. Например, для случая $\mu = 0,3$ точность составляла 1,5%. Квадратиками изображена зависимость касательной силы P_t от коэффициента трения μ .

Хорошее соответствие сопоставляемых результатов позволяет предположить, что данный численный алгоритм можно использовать для решения рассматриваемого класса контактных задач.

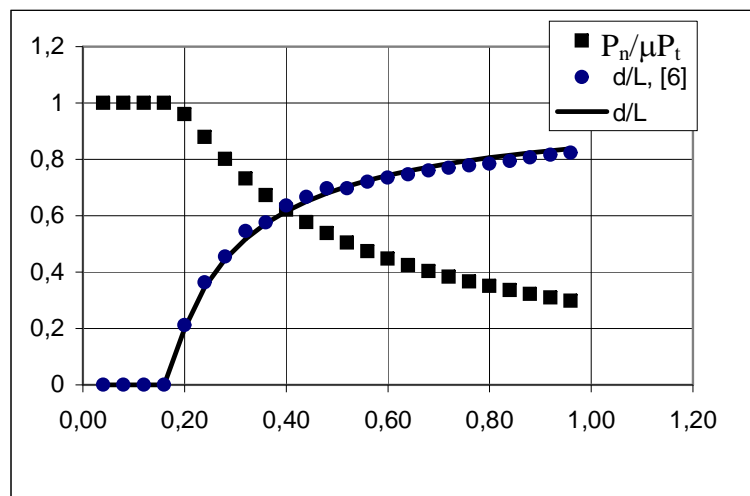


Рис. 1

В заключении приведены распределения нормальных p и касательных t контактных усилий (рисунок 2), полученных при решении задачи качения упруго цилиндра по упругому полупространству, когда цилиндр и полупространство имеют различные упругие постоянные.

Исходных данных задачи: модуль упругости полупространства $E_1 = 6 \cdot 10^5$ МПа, цилиндра – $E_2 = 2 \cdot 10^5$ МПа, коэффициенты Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; радиус цилиндра равен 0,2 м. Решение получено на сетке из $N = 81$ элементов при следующих значениях параметров: $\Delta = 0,05$ мм ($P_t = 2,75$ кН), $\xi = 3 \cdot 10^{-3}$ ($P_t = 0,67$ кН). Сплошная линия на рисунке соответствует задаче качения с одинаковыми упругими постоянными с теми же значениями P_y и P_x .

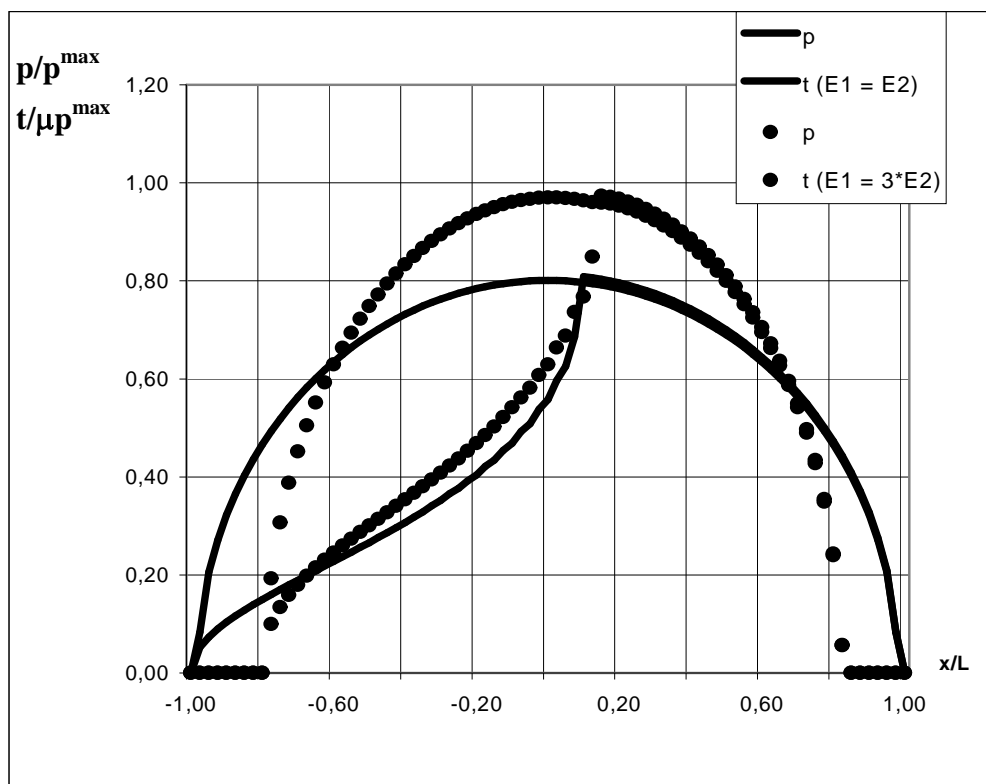


Рис. 2

Список литературы: 1. Reynolds O. On rolling friction.- Philos. Trans. Roy. Soc., 1875, 166, p.155. 2. Carter F.M. On the action of a locomotive driving wheel // Proc. Roy. Soc., Ser.A.- 1926.-Vol.112.-p.151-157. 3. Гольдштейн Р.В., Зазовский А.Ф., Спектор А.А. Решение пространственных контактных задач качения с проскальзыванием вариационным методом. – М, 1979. - (Препринт/ ИПМ АН СССР: 134). 4. Александров А. И. Решение задач контактного взаимодействия упругих тел с использованием нелинейных операторных уравнений. – Днепропетровск, 1989.- 74с. - (Препринт/ ИТМ АН СССР; 89-2). 5. Бокий И.Б. Численный подход к решению контактной задачи взаимодействия двух упругих тел с учетом трения и истории приложения внешнего нагружения. // Вестник ЯГУ. – 12006.- Т.3, №3. –С.42-46. 6. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М: Мир, 1989.– 510 с.

Сдано в редакцию 16.05.07

СТРУКТУРНАЯ НЕЖЕСТКОСТЬ СОСТАВЛЯЮЩИХ СРЕДЫ ПРИ ЭЛЕКТРОФИЗИКОХИМИЧЕСКОЙ ДОВОДКЕ СОПРЯЖЕННЫХ ДЕТАЛЕЙ Д.В.С.

Болдарь Л.Н. (ЛНАУ, г. Луганск, Украина)

It is shown that the size of wear of standards at the mutual electrophysicalchemical polishing depends not only on changeability of basic factors but also from structural non-rigid of constituents of environment on the phase scopes.