

/ Под общей редакцией Ф.В.Новикова и А.В.Якимова. В десяти томах. Т.4 «Теория абразивной и алмазно-абразивной обработки материалов». – Одесса: ОНПУ, 2002. – 802 с. 12.Сороченко В.Г.Процесс алмазного шлифования древесно-фенольных композиций. – Дис...канд.техн.наук. – Киев, 1986. – 278 с.

Сдано в редакцию 13.05.05
Рекомендовано д.т.н., проф. Прутяну О.

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ШТАМПОВ В ФОРМЕ МНОГОУГОЛЬНИКОВ С УЧЕТОМ ШЕРОХОВАТОСТИ, ТРЕНИЯ

Шишканова А.А. (ЗНТУ, г. Запорожье, Украина)

Three-dimensional contact problem is researched in static and quasi static cases. Main equation of the problem contains integrals with weak singularity. The computational-analytical technique is developed: the system of integral equations is reduced to algebraic equation system by regularization and cubature formulae. Desingularization of the corner points is made because of the middle value choice of the desired function at each part of the integration domain. Unknown contact domain is defined by synthesis of small parameter expansion and numeric integral-differential methods. The suggested technique is acceptable for engineering practice. The normal pressure distribution under the contact domain, its shape, punch inclination, penetrations are obtained. Concrete problems are solved for simply and doubly-connected punches with rectangular, hexagon, octagon contact domains.

1. Введение. Контактное взаимодействие элементов конструкций и деталей машин всегда присутствует при эксплуатации техники. Как правило, области контакта характеризуются высоким уровнем концентрации напряжений, что часто приводит к частичному или полному разрушению элементов конструкций. Для использования современных методик расчетов на прочность необходимо детальное изучение напряженно-деформированного состояния элементов конструкций с учетом особенностей их формы и размеров, а также условий контакта. Поэтому построение решений конкретных задач механики является одним из приоритетных направлений развития современной математической теории упругости.

Анализ публикаций показывает, что математическая теория решения контактных задач развита достаточно хорошо для круговых и кольцевых областей контакта [1–5]. Однако недостаточно исследованными остаются, например, задачи с учетом реальной геометрии контактирующих тел и сил трения, что и делает актуальной данную работу. Во многих практических случаях возникает необходимость решения задач с областями контакта, содержащими угловые точки. Без учета трения и шероховатости приближенные решения для односвязных областей с угловыми точками получены в работах [4], для двусвязных - [5-7]. Рассмотрение аналогичной задачи с учетом шероховатости и трения является важным при создании различных систем в машиностроении для учета реальных свойств поверхностей контакта.

Целью данной работы является решение задачи о вдавливании в упругое полупространство односвязных и двусвязных штампов с основаниями, ограниченными прямыми линиями, т.е. область контакта содержит острые кромки и угловые точки. Задача рассматривается с учетом шероховатости поверхности упругого полупространства, а также наличием сил трения.

2. Постановка задачи. В упругое полупространство вдавливаются цилиндрический штамп в форме двусвязного (односвязного) многоугольника в плане под действием центрально приложенной силы Q . На штамп также действует горизонтальная сила T , которая приложена на расстоянии d от основания штампа. Сила T уравнивается силой трения. Действующие на штамп силы обеспечивают состояние предельного равновесия или равномерного движения. Скорость перемещения штампа много меньше скорости распространения звука в упругой среде, что позволяет пренебречь динамическими явлениями и рассматривать задачу как квазистатическую. Система координат связана с движущимся штампом.

Задача о вдавливании двусвязного штампа в упругое полупространство при линейном законе трения сводится к решению системы уравнений равновесия и основного интегрального уравнения, которое имеет вид [2].

$$\frac{1-\nu^2}{\pi E} \cdot \iint_S \frac{p(\rho, \theta)}{r} \cdot [1 + \varepsilon_1 \cos(r, x)] ds = \delta + \gamma \rho_0 \cos \theta_0, \quad (1)$$

Здесь ν – коэффициент Пуассона, $p(\rho, \theta)$ – функция, характеризующая распределение давления под штампом, $S = \{(\rho, \theta) : a \cdot f_a(\theta) \leq \rho \leq b \cdot f_b(\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, $(\rho_0, \theta_0) \in S$, $r^2 = \rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0\rho \cos(\theta - \theta_0)$, $ds = \rho d\rho d\theta$, δ – заглупление штампа, γ характеризует поворот штампа, $\varepsilon_1 = \mu \tilde{\lambda}$, μ – коэффициент трения, $\tilde{\lambda} = (1-2\nu)/(2-2\nu)$; $f_a(\theta)$, $f_b(\theta)$ – функции, описывающие внутреннюю и внешние границы основания штампа, в случае односвязного штампа $f_a(\theta)$ отсутствует.

3. Основное содержание и результаты работы. Уравнение (1) является интегральным уравнением Фредгольма первого рода со слабой особенностью. Регуляризация уравнения (1) приводит решение уравнения (1) к решению уравнения второго рода [5]:

$$(1-\alpha) \cdot P(\rho, \theta) + \iint_{\Omega} \frac{P}{2\pi br} \cdot \left[1 + \varepsilon_1 \frac{\rho_0 \cos \theta_0 - \rho \cos \theta}{r} \right] dS = \frac{\delta + \gamma \rho_0 \cos \theta_0}{2\pi b}, \quad (2)$$

где $P(\rho, \theta) = (1-\nu^2)/(\pi E) \cdot p(\rho, \theta)$, $B_1/(2\pi) = 1-\alpha$, $0 < \alpha < 1$ [11], $B_1 = B\pi E / ((1-\nu^2) \cdot b)$, B – коэффициент, характеризующий деформационные свойства шероховатости поверхности упругого полупространства [2].

Таким образом, предложенная регуляризация имеет смысл учета шероховатости упругого полупространства, и чем ближе значение коэффициента α к единице, тем более гладкую поверхность мы рассматриваем.

Основным интегральным уравнением задачи вдавливания штампа в упругое шероховатое полупространство с учетом трения является уравнение (2). Вертикальными перемещениями микровыступов, которые обусловлены действием касательной силы, пренебрегаем. При $\alpha < 1$ данное уравнение можно решать методом последовательных приближений. Применяется также метод Н.Н.Боголюбова и Н.И.Крылова замены интегрального уравнения системой алгебраических уравнений [5]. На каждом участке разбиения области интегрирования берутся средние значения

искомой функции, что дает возможность устранить особенности угловых точек. Таким образом, составлены кубатурные формулы типа Симпсона. Кроме того, для устранения особенностей предложено введение разности значений искомой функции в разных точках и проведение последующей интерполяции слагаемых для совпадающих индексов точек [5,9].

Получаем для численного решения основного уравнения с учетом трения с произвольной площадкой контакта следующие рекуррентные выражения для малых B_1 :

$$P_{k,q}^{(m+1)} = \alpha P_{k,q}^{(m)} - \sum_{i=l=1}^n \sum_{p=1}^p \frac{A_{il} (P_{i,l}^{(m)} - P_{k,q}^{(m)})}{2\pi b r} \left[1 + \varepsilon_1 \frac{(t_k \cos \tau_q - s_i \cos \theta_l)}{r} \right] \cdot s_i \Delta s_i \Delta \theta_l + \frac{\delta}{2\pi b} + \\ + \mathcal{M}_k \cos \tau_q / (2\pi b) - P_{k,q}^{(m)} \sum_{i=l=1}^n \sum_{p=1}^p A_{il} \left[1 + \frac{\varepsilon_1 (t_k \cos \tau_q - s_i \cos \theta_l)}{r} \right] \frac{s_i \Delta s_i \Delta \theta_l}{2\pi b r}, \quad (3)$$

$$P_{k,q} = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \cdot p(t_k, \tau_q), \quad r^2 = t_k^2 + s_i^2 - 2t_k s_i \cos(\theta_l - \tau_q), \quad p(t_k, \tau_q) = 0, \quad (t_k, \tau_q) \notin S, \quad A_{il} = 1.$$

При движении даже осесимметричного штампа, как видно из формулы (3), давление под штампом будет распределяться несимметрично. Вследствие этого возникает дополнительный момент:

$$M_y = \iint_S p(\rho, \theta) \cdot \rho^2 \cos \theta d\rho d\theta.$$

Равнодействующая сил давления будет смещена по направлению движения штампа. Из условия равновесия моментов сил, действующих на движущийся штамп, следует, что, для того чтобы штамп двигался без наклона, сила T , вызывающая движение штампа, должна быть приложена на расстоянии $d = |M_y / (\mu Q)|$ [2].

В противном случае штамп будет иметь наклонное основание. Незвестная постоянная γ , определяющая угол наклона штампа, находится из условия равенства моментов всех сил, действующих на штамп [2].

Разработан аналитико-численный метод решения задач о вдавлении двусвязных штампов, близких к кольцевым, в упругое шероховатое полупространство путем сведения их к последовательности аналогичных задач для штампов в форме кругового кольца с использованием разложений потенциала простого слоя [5,7,9].

Для применения такого метода необходимо, чтобы штамп, ограничивался гладкими функциями. Пусть $S = \{(\rho, \theta) : a \cdot (1 + f(\varepsilon, \theta)) \leq \rho \leq b \cdot (1 + f(\varepsilon, \theta)), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, $f(\varepsilon, \theta)$ – непрерывно дифференцируемая функция, которую можно представить в виде:

$$f(\varepsilon, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i f_i(\theta). \quad (4)$$

Например, функции $f_i(\varepsilon, \theta)$, $i = 1, 2$, для $\varepsilon = 0,1406$ в разложении (4) имеют вид для квадрата:

$$f_1(\theta) = a_{10} + a_{14} \cos 4\theta, \quad f_2(\theta) = 1,2677 \cos 8\theta, \quad a_{10} = 0,8178, \quad a_{14} = -1; \quad (5)$$

для правильного шестиугольника:

$$f_1(\theta) = a_{10} + a_{16} \cos 6\theta, \quad f_2(\theta) = 0,7410 \cos 12\theta, \quad a_{10} = -0,6504, \quad a_{16} = 0,3758; \quad (6)$$

для правильного восьмиугольника:

$$f_1(\theta) = a_{10} + a_{14} \cos 4\theta, \quad f_2(\theta) = 1,5092 \cos 8\theta, \quad a_{10} = -0,5626, \quad a_{14} = 0,1556. \quad (7)$$

Для решения с помощью кубатурных формул задачи с неизвестной площадкой контакта получены разложения потенциала простого слоя при условии, что неизвестные функции удовлетворяют условию Липшица с положительным показателем:

$$\iint_S \frac{p(\rho, \theta)}{r} ds = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \left[\iint_{\Omega} \frac{P_i(R, \varphi)}{r(R, R_0)} d\Omega + H_i(P_0, P_1, \dots, P_{i-1}) \right], \quad (8)$$

где для $i = 0, 1, 2$: $H_0 = 0$, $H_1(P_0) = D_1(P_0)$, $H_2(P_0, P_1) = D_1(P_1) + D_2(P_0)$,

$$D_1(P_0) = \iint_{\Omega} \frac{P_0(R)}{r(R, R_0)} f_1(\varphi) d\Omega - R_0 \frac{\partial}{\partial R_0} \iint_{\Omega} \frac{P_0(R)}{r(R, R_0)} [f_1(\varphi) - f_1(\varphi_0)] d\Omega,$$

$$D_2(P_0) = \iint_{\Omega} \frac{P_0(R)}{r(R, R_0)} f_2(\varphi) d\Omega - R_0 \frac{\partial}{\partial R_0} \iint_{\Omega} \frac{P_0(R)}{r(R, R_0)} [f_2(\varphi) - f_2(\varphi_0)] d\Omega +$$

$$+ R_0 \frac{\partial^2}{\partial R_0^2} \iint_{\Omega} \frac{P_0(R)}{2r(R, R_0)} [f_1(\varphi) - f_1(\varphi_0)]^2 d\Omega;$$

$$r^2(R, R_0) = R^2 + R_0^2 - 2R \cdot R_0 \cos(\varphi - \varphi_0); \quad (R_0, \varphi_0) \in \Omega, \quad \Omega = \{(R, \varphi) : a \leq R \leq b, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

(R_0, φ_0) – внутренняя точка области Ω . В полученном разложении (8) потенциала коэффициенты при степенях ε зависят от аналогичных потенциалов, распределенных по области в форме кругового кольца.

4. Исследование числовых примеров. Рассмотрим частный случай для исследования влияния шероховатости поверхности, когда $\varepsilon_1 = 0$, отсутствует трение.

На рисунках 1-4 изображены кривые равных давлений, $p(\rho, \theta) / p^*$, $p^* = Q / (2\pi b^2)$, для штампов с различными основаниями в форме многоугольников. Так как распределение давлений под штампом при отсутствии трения симметрично, то приведены только четверти контактных областей $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, для следующих значений безразмерных параметров $\alpha = 0,9$ и для двусвязных штампов $a/b = 0.5$.

Численный анализ, выполненный для различных областей контакта, позволяет оценить достоверность решения. В работе [3] проведена аналогия между кривыми равных давлений и линиями уровня Прандтля при кручении стержня соответствующего сечения. Во всех рассмотренных случаях картина равных давлений соответствует указанной аналогии: вблизи центра области контакта линии мало отличаются от окружностей и по мере удаления принимают вид подобных границе области контакта, выпрямляются и вытягиваются к угловой точке. Вблизи границы области контакта

линии равных давлений сгущаются. На самой границе давления принимают максимальные конечные значения из-за учета шероховатости. Линии равных давлений замыкаются вблизи точек с минимальным давлением. Можно сделать вывод, что точки с минимальным давлением расположены в центре односвязных штампов и в наиболее широких частях двусвязных штампов. Для наглядности, на рис. 5, приведена четверть поверхности нормальных давлений для плоского восьмиугольного двусвязного штампа, соответствующая картина равных давлений приведена на рис. 4 б).

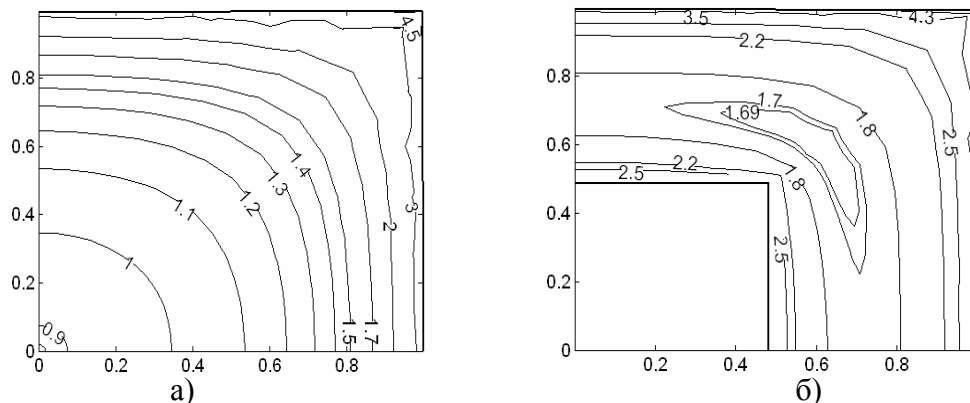


Рис. 1. Линии равных давлений под односвязным (а) и двусвязным (б) штампами; ограниченными квадратами в плане ($\alpha = 0,9$)

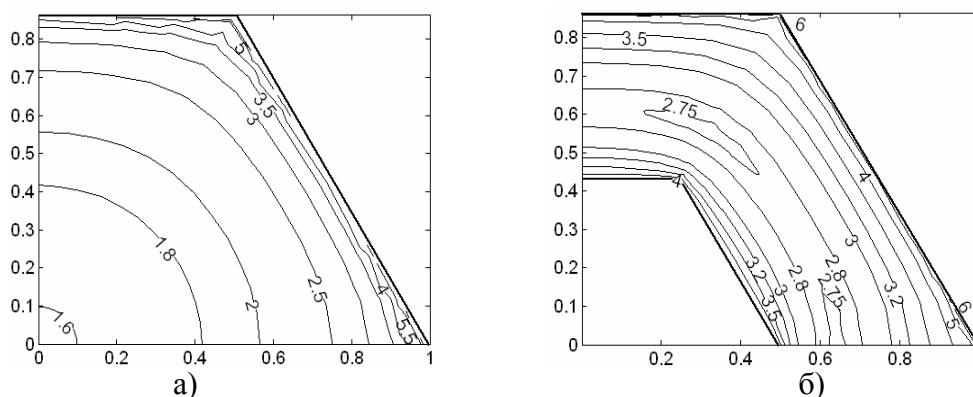


Рис. 2. Линии равных давлений под односвязным (а) и двусвязным (б) штампами; ограниченными шестиугольниками в плане ($\alpha = 0,9$)

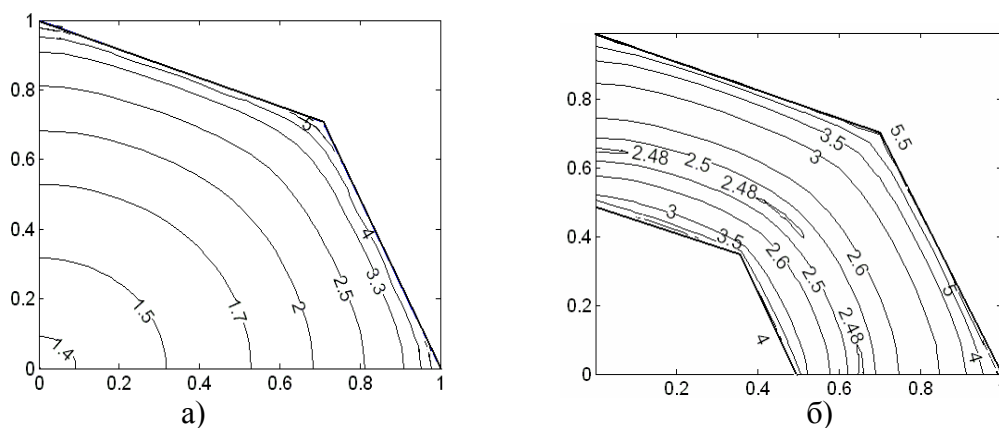


Рис. 3. Линии равных давлений под односвязным (а) и двусвязным (б) штампами; ограниченными восьмиугольниками в плане ($\alpha = 0,9$)

На рис.6 показаны графики изменения нормального давления $p(\rho, \theta)/p^*$, в сечении $\theta = 0$ под двусвязным штампом, ограниченным в плане правильными шестиугольниками, в зависимости от влияния различных значений параметров α и a/b . С увеличением шероховатости распределение давления становится более равномерным по площадке контакта, то есть увеличивается минимальное давление и снижается максимальное на границах площадки контакта, что совпадает с результатами в работах [2,5,9]. Линии, отличающейся значением ширины штампа a/b , показывают, что с уменьшением ширины давления возрастают из-за уменьшения площади контакта.

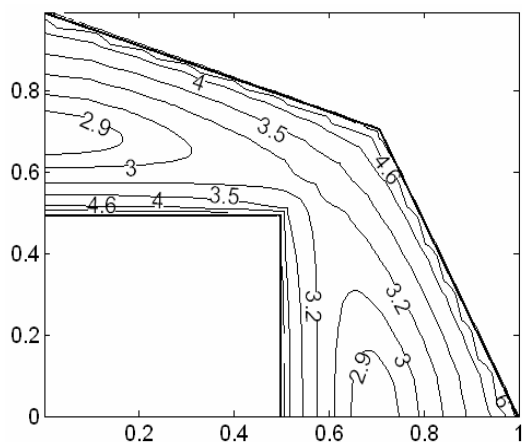


Рис. 4. Линии равных давлений под двусвязным штампом; с внутренней границей в форме квадрата; внешней - восьмиугольника

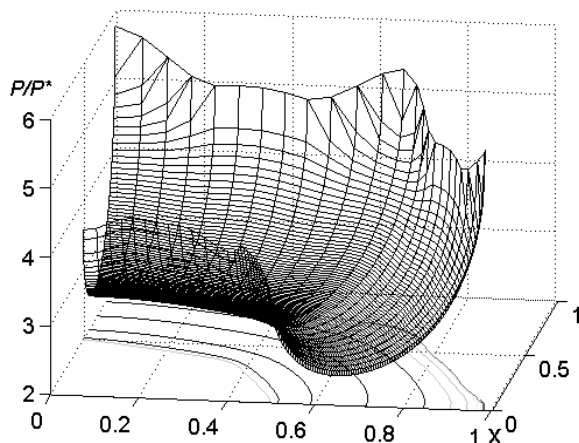


Рис. 5. Поверхность давлений под двусвязным штампом, ограниченным восьмиугольниками

Разработанный метод позволяет находить давления и для многосвязных областей контакта. На рис. 7 изображены линии давлений под штампом, ограниченным правильным восьмиугольником, и имеющем четыре отверстия в форме квадратов со сторонами $0.28b$, расположенными на осях координат со сдвигом от центра на $0.64b$.

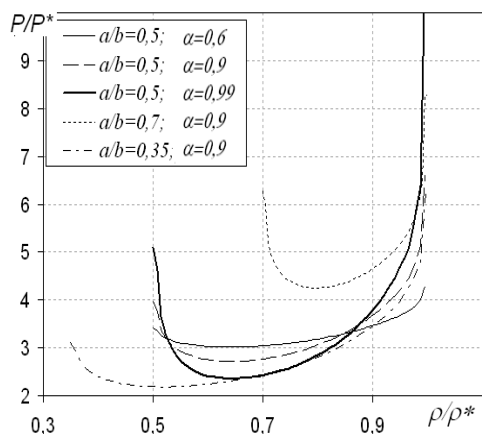


Рис. 6. Графики зависимости давлений под двусвязными шестиугольными штампами, при разной ширине a/b , шероховатости α

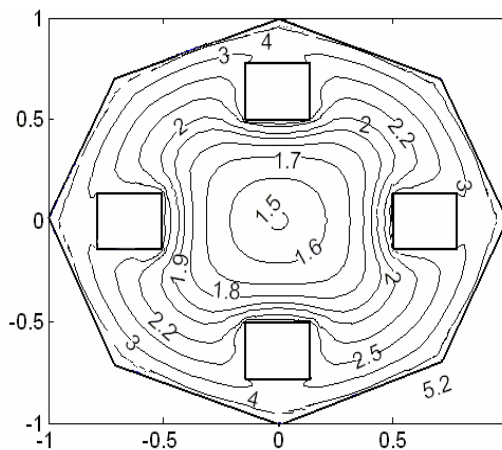


Рис. 7. Линии равных давлений под восьмиугольным штампом; с четырьмя квадратными отверстиями ($\alpha = 0,9$)

При движении давление под штампом распределяется несимметрично (рис.8, 9). Значение величины $\gamma^* = \gamma/(Q/(2\pi b))$, характеризующей угол наклона штампа, для

двусвязного штампа, ограниченного шестиугольниками в плане (рис.8 а) – $\gamma^*=0,19$, а для штампа ограниченного восьмиугольниками в плане (рис.8 б) – $\gamma^*=0,17$, при остальных безразмерных параметрах $\alpha=0,75$, $\varepsilon_1=0,057$, $d/b=0,3$; $\alpha=0,7$; $a/b=1/2$.

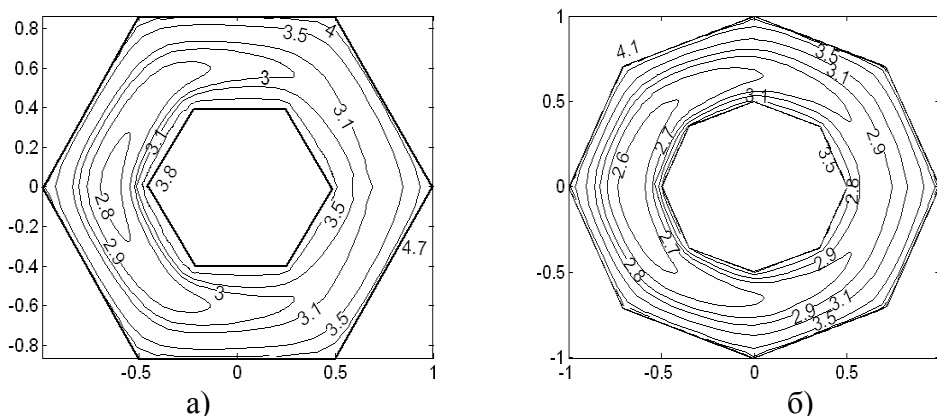


Рис. 8. Линии равных давлений под двусвязными шестиугольным (а) и восьмиугольным (б) в плане штампами; при $\alpha=0,75$, $\varepsilon_1=0,057$

Поверхности распределения нормальных давлений под штампами в форме шестиугольного кольца в плане изображены на рис. 8 при $d/b=0,3$; $\alpha=0,7$; $a/b=1/2$; $\varepsilon_1=0,057$ – значение $\gamma^*=0,49$. Сравним различные способы описания границ области контакта S : с помощью уравнений прямых линий (рис.8 а), и уравнений (б) гладких линий (рис.8 б). Значения давлений для таких областей значительно не отличаются и совпадают при приближенном счете в основном до третьей значащей цифры, только в небольшой окрестности угловых точек разница появляется во второй цифре.

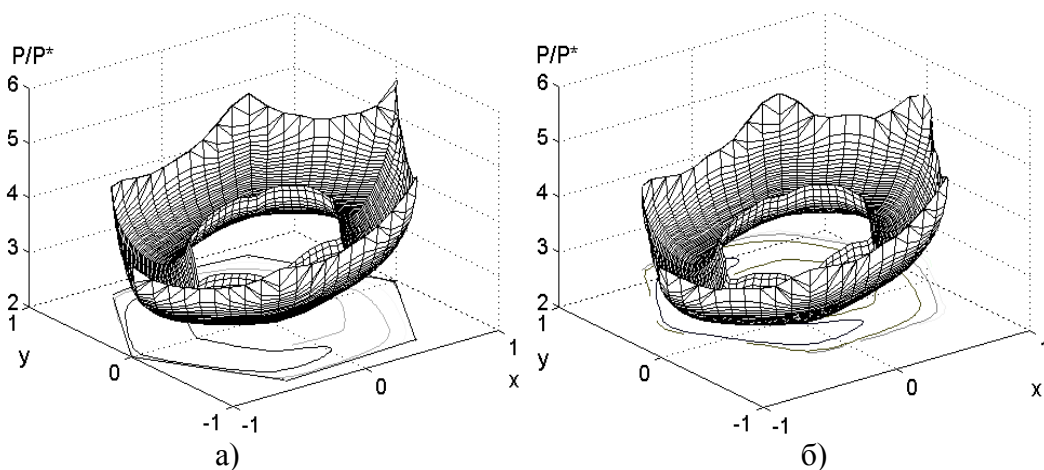


Рис. 9. Поверхности распределения нормальных давлений под двусвязными шестиугольными штампами, ограниченными прямыми (а) и гладкими (б) линиями

Увеличение высоты приложения сдвигающей силы T приводит к большей несимметричности распределения давлений, что может привести к отрыву штампа от поверхности полупространства. Для квадратного в плане штампа при значениях $d/b \geq 2$ возникает зона отрицательных давлений. Поверхность распределения давлений под квадратным штампом при $\varepsilon_1=0,057$; $\alpha=0,8$; $b=1$; $d/b=2,3$ приведена на рис. 10.

Приближенные зоны положительных давлений изображены на рис. 11, пунктиром ограничена область при $d/b=2$ - $\gamma^*=1,01$, сплошной линией – при $d/b=2,3$ - $\gamma^*=1,21$.

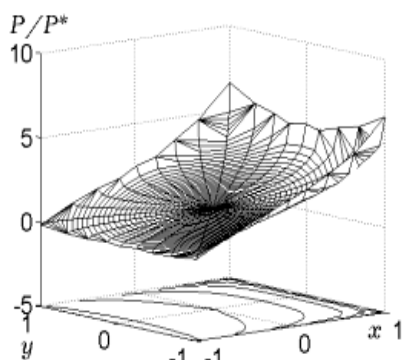


Рис. 10. Поверхность нормальных давлений под квадратным штампом

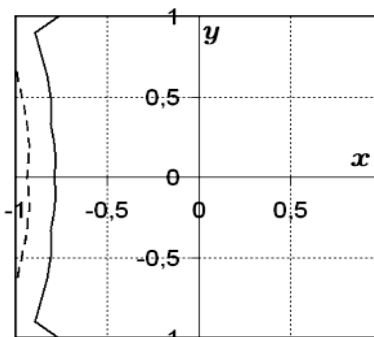


Рис. 11. Зоны положительных давлений под квадратным штампом

6. Заключение. Рассмотрена задача о вдавливании штампа, с полигональной областью контакта. Для решения контактных задач с учетом трения, шероховатости упругого полупространства, в которых область контакта содержит угловые точки, предложен метод с использованием регуляризации интегрального уравнения, кубатурных формул, введением разности значений искомой функции в разных точках и последующей интерполяции слагаемых для устранения особенностей. Приведены числовые примеры, которые подтверждают правильность и эффективность предложенного метода решения.

Список литературы: 1. Гузь А.Н., Рудницкий В.Б. Контактная задача о давлении упругого штампа на упругое полупространство с начальными напряжениями //Прикл. механика. 1984, т.20, №8. - С.3-11. 2. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии. - М.: Машиностроение, 1988.-256 с. 3. Моссаковский В.И., Качаловская Н.Е., Голикова С.С. Контактные задачи математической теории упругости. - К.: Наук. думка, 1985, - 175 с. 4. Шишканова С.Ф. О напряженном состоянии упругого пространства, ослабленного плоской трещиной близкой к кольцевой. //Прикл. математика. 1990, Т.26 - №5. - С.9-13. 5. Шишканова А.А. Приближенное решение задачи о контакте кольцевого штампа с шероховатым полупространством с использованием разложения потенциала простого слоя. //Проблемы вычисл. механики и прочности конструкций. 2003, Т.7. - С.123-133. 6. Пожув В.И., Зайцева Т.А. О решении пространственных контактных задач для некругового штампа //Изв. РАН, Механика твердого тела. 1994, №4. -С.62-70. 7. Шишканова Г.А., Зайцева Т.А. Про розвинення потенціалу простого шару для некругового кільця та його використання. Вісник ХГТУ, Херсон, 2003, №3. - С.462-466. 8. Рвачев В.Л., Проценко В.С. Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. - К.: Наук. думка, 1977. - 235 с. 9. Шишканова А.А. Контактное взаимодействие с учетом трения и шероховатости. //Прогрессивные технологии и системы машиностроения: Межд.сб.науч.трудов. Донецк: ДонГТУ, 2004, Вып.27 – С. 300-309

Сдано в редакцию 20.05.05
Рекомендовано д.т.н., проф. Сулов А.Г.