

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИВИЗНЫ И КРУЧЕНИЯ СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

Стрельников В.Н. (АО «НКМЗ», г. Краматорск, Украина)

The problem of the theory of envelopes about an elastic deformation of the basic supporting members heavily loaded transmissions with intermediate solids of revolution - thin-walled rollers is solved. Components of a strain tensor, and also change of a curvature and torsion of a median surface of a thin-walled roller are defined. The solution is necessary for an estimation of elastic properties both single-layer, and a multilayer construction of rollers.

Введение. В передачах с промежуточными телами качения (рис. 1, 2) используются ролики, представляющие собой либо однослойную, либо многослойную конструкцию, собранную из коаксиально расположенных оболочек. Поперечное сечение ролика представляет кольцевую область. Дуга внешней окружности нагружена контактными усилиями. Условия контакта определяются смещениями точек дуга внешней окружности, которые зависят от действующей нагрузки. Связь между перемещениями и нагрузкой устанавливается в результате решения системы дифференциальных уравнений, описывающих деформированное состояние оболочки под действием нагрузки.

Целью исследований является определение компонент тензора деформации, изменения кривизны и кручения срединной поверхности тонкостенного ролика.

Содержание работы. Общая теория тонких оболочек строится на основании гипотез, которые устанавливаются с учетом геометрии оболочки: толщина оболочки мала по сравнению с другими ее размерами. Исходя из допущений [1], [2]:

1. Линии, нормальные к срединной поверхности до деформации, преобразуются в прямые линии, нормальные к деформированной срединной поверхности.

2. Компоненты напряжений, направленные по нормали к срединной поверхности малы по сравнению с другими составляющими напряжений.

На основании первой гипотезы положение любой точки, принадлежащей оболочке, задается через положение точки на срединной поверхности и ее положением на нормали к срединной поверхности, определяем координатой z . На срединной поверхности положение точки задаем криволинейными координатами ξ_1, ξ_2 . В качестве координатных линий выбираем параметризованные линии кривизны. Линии кривизны образуют на поверхности ортогональную координатную сеть. Если срединной поверхностью является прямой круговой цилиндр радиуса a , то координатные линии получим, пересекая поверхность плоскостями, перпендикулярными оси цилиндра, и плоскостями, проходящими через его ось. Координатными линиями будут окружности и образующие цилиндра. В качестве координат примем $\xi_1 = x, \xi_2 = \varphi$.

Исследуем распределение внутренних сил. Выделим элемент оболочки, ограниченный поверхностями $x = const, x + dx = const, \varphi = const, \varphi + d\varphi = const, z = \pm 0,5h$, где h – толщина оболочки (рис. 3).

Координатная линия ξ_1 — прямолинейная и совпадает с осью X , координатная линия ξ_2 – окружность, ось Y направлена по касательной к ней. Радиусы кривизны координатных линий равны $R_1 = \infty, R_2 = a$. По плоским граням элемента действуют нормальные и касательные напряжения.

Введем усилия, отнесенные к единице длины координатных линий срединной поверхности. Для этого напряжения, распределенные по плоским граням элемента, суммируем по толщине оболочки

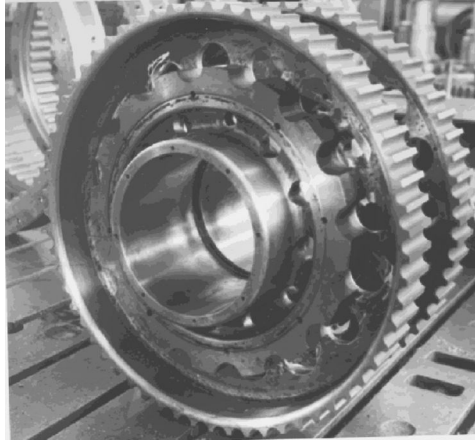


Рис. 1. Зубчатые колёса с круговыми зубьями

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_1 \left(1 - \frac{Z}{a}\right) dZ, & N_2 &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_1 dZ, & N_{1;2} &= \int \tau_{1;2} \left(1 - \frac{Z}{a}\right) dZ, \\ N_{2;1} &= \int \tau_{2;1} dZ, & Q_1 &= \int \tau_{1Z} \left(1 - \frac{Z}{a}\right) dZ, & Q_2 &= \int \tau_{2Z} dZ. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Составим выражения для изгибающих и крутящих моментов

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_1 \left(1 - \frac{Z}{a}\right) Z dZ, & M_2 &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_2 Z dZ, \\ M_{1;2} &= - \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{1,2} \left(1 - \frac{Z}{a}\right) Z dZ, & M_{2;1} &= - \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{2,1} Z dZ. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Знак (–) перед интегралом в формуле для $M_{1,2}$ поставлен потому, что при положительных $\tau_{1,2}$ и z моменты $M_{1,2}$ направлены по часовой стрелке и берутся со знаком минус (рис. 4).

Введение силовых факторов позволяет рассмотреть равновесие двумерного элемента оболочки, вырезанного из срединной поверхности (рис. 5).

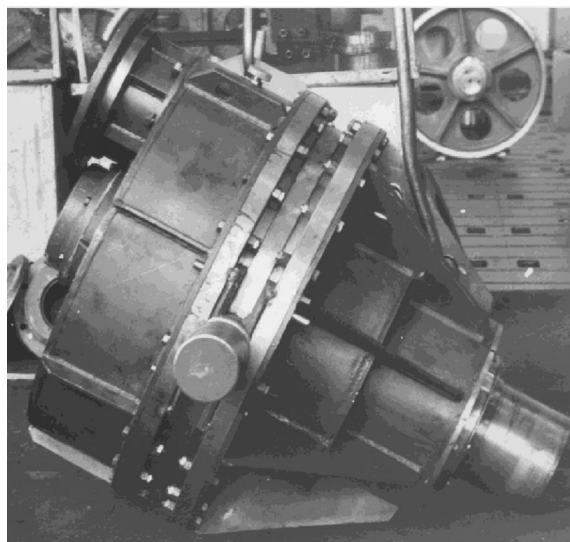


Рис. 2. Редуктор с промежуточными телами качения привода классификатора

На рисунке момент $M_{1,2}$ показан положительным. Тогда в силу закона парности касательных напряжений момент $M_{2,1}$ надо показать отрицательным: при взгляде с положительного направления оси Y вращение видим по часовой стрелке. Чтобы привести формулу для $M_{2,1}$ в соответствие с направлением, показанным на рисунке, ставим перед интегралом знак (-). В соответствии с направлениями сил и моментов, (рис. 5), составляем уравнения равновесия для элемента оболочки

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial N_{2;1}}{\partial \varphi} + P_1 &= 0, & \frac{\partial N_{1;2}}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_2}{\partial \varphi} - \frac{Q_2}{a} + P_\varphi &= 0, \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial Q_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{a} N_2 + P(x, \varphi) &= 0, & \frac{\partial M_{1;2}}{\partial x} - \frac{1}{a} \frac{\partial M_2}{\partial \varphi} + Q_2 &= 0, \\ \frac{\partial M_1}{\partial x} - \frac{1}{a} \frac{\partial M_{2;1}}{\partial \varphi} - Q_1 &= 0; & \Sigma M_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

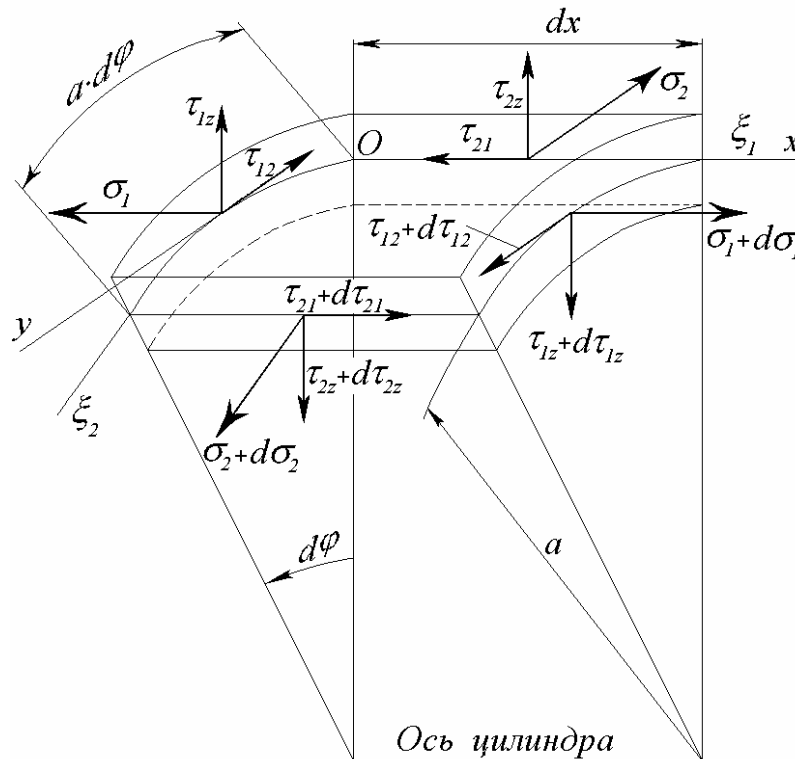


Рис. 3. Распределение внутренних сил в элементе цилиндрической оболочки

Определение компонент тензора деформации рассмотрим в общем виде. Пусть срединной поверхности соответствует сетка координатных линий, которыми являются линии кривизны. Запишем линейный элемент срединной поверхности оболочки:

$$dS^2 = \alpha_1^2 d\xi_1^2 + \alpha_2^2 d\xi_2^2. \quad (4)$$

Дугам координатных линий, которыми являются линии кривизны, соответствуют центральные углы $d\varphi_1$, $d\varphi_2$, проведенные из центров кривизны

$$d\varphi_1 = \frac{\alpha_1 d\xi_1}{R_1}, \quad d\varphi_2 = \frac{\alpha_2 d\xi_2}{R_2}. \quad (5)$$

Найдем элемент длины соответствующих эквидистантной поверхности на расстоянии от координатной поверхности (рис. 6)

$$dS^2 = \alpha_1^2 \left(\frac{R_1 - Z}{R_1} \right)^2 d\xi_1^2 + \alpha_2^2 \left(\frac{R_2 - Z}{R_2} \right)^2 d\xi_2^2 + dZ^2. \quad (6)$$

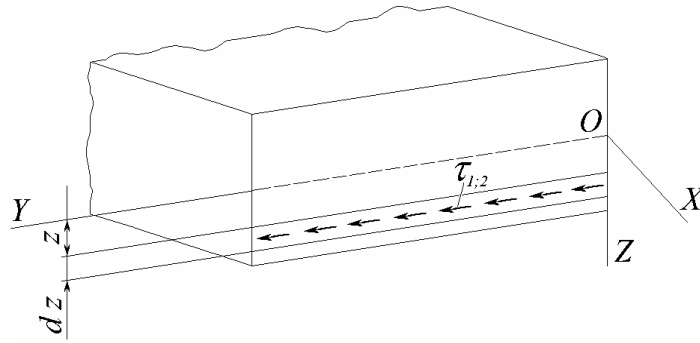


Рис. 4. Определение знака крутящего момента $M_{1,2}$

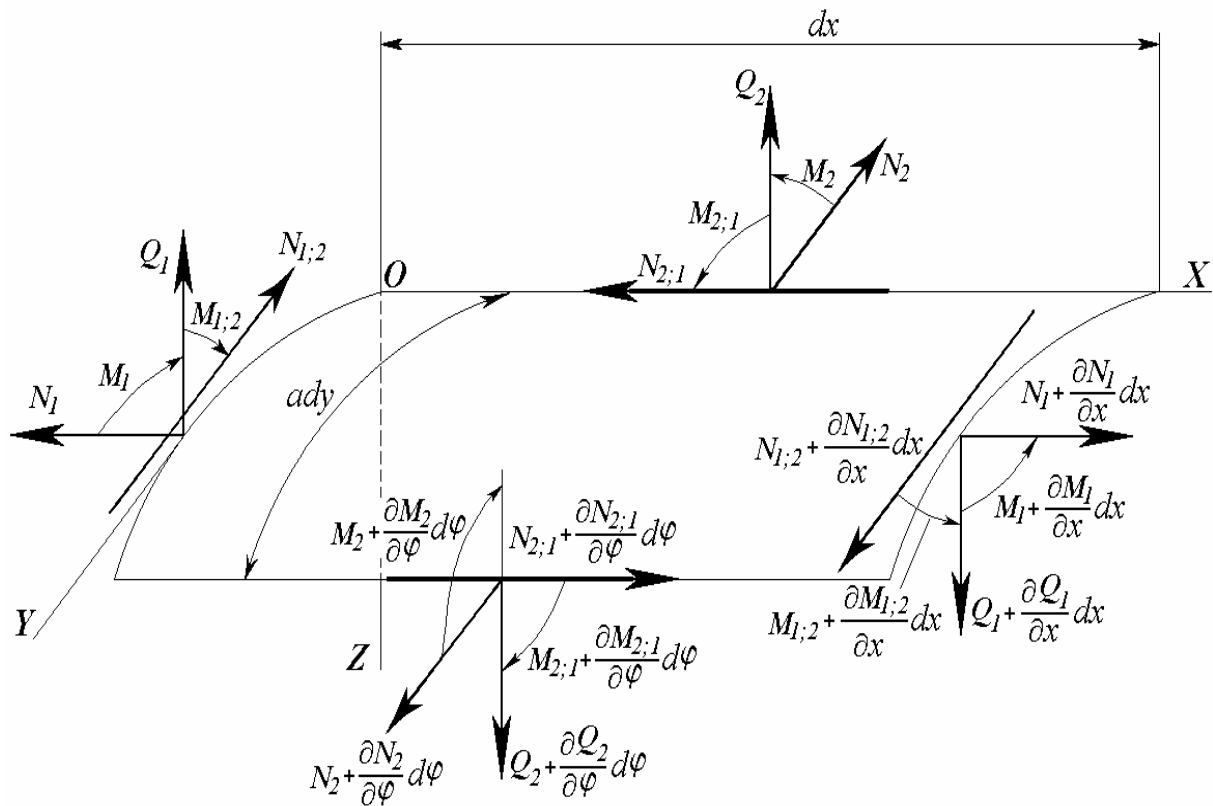


Рис. 5 Силовые факторы, отнесенные к единице длины координатных линий

Из формулы (6) следует: $A_1 = \alpha_1 \left(1 - \frac{Z}{R_1} \right), \quad A_2 = \alpha_2 \left(1 - \frac{Z}{R_2} \right), \quad A_3 = 1. \quad (7)$

Выведем формулу для компонент тензора деформации в криволинейных координатах. Рассмотрим две близкие точки $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и $Q(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2, \xi_3 + d\xi_3)$. В результате деформации точка P перейдет в точку $P'(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3)$; точка Q в точку $Q'(\xi''_1, \xi''_2, \xi''_3)$.

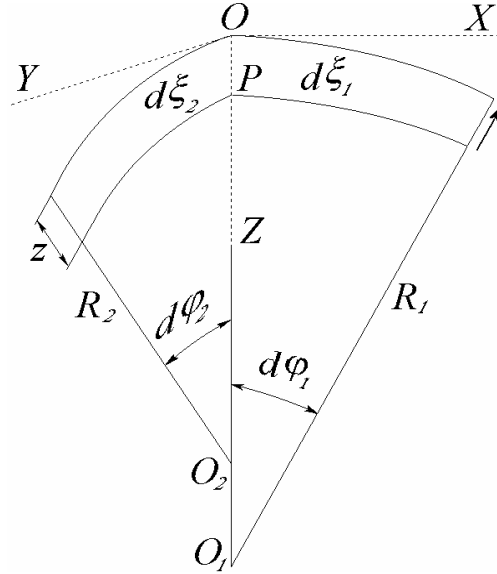


Рис. 6. К расчету элемента длины координатной линии эквидистантной поверхности оболочки

Координаты (ξ_1, ξ_2, ξ_3) и (ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3) связаны соотношениями

$$\xi'_1 = \xi_1 + \mu_1, \quad \xi'_2 = \xi_2 + \mu_2, \quad \xi'_3 = \xi_3 + \mu_3.$$

Координаты $\xi''_1, \xi''_2, \xi''_3$ получают приращения

$$\left. \begin{aligned} \xi''_1 &= \xi_1 + \mu_1 + d\xi_1 + \frac{d\mu_1}{d\xi_1} d\xi_1 + \frac{d\mu_1}{d\xi_2} d\xi_2 - \frac{d\mu_1}{d\xi_3} d\xi_3, \\ \xi''_2 &= \xi_2 + \mu_2 + d\xi_2 + \frac{d\mu_2}{d\xi_1} d\xi_1 + \frac{d\mu_2}{d\xi_2} d\xi_2 + \frac{d\mu_2}{d\xi_3} d\xi_3, \\ \xi''_3 &= \xi_3 + \mu_3 + d\xi_3 + \frac{d\mu_3}{d\xi_1} d\xi_1 + \frac{d\mu_3}{d\xi_2} d\xi_2 + \frac{d\mu_3}{d\xi_3} d\xi_3. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Записываем линейный элемент после деформации

$$(dS')^2 = (A'_1)^2 (d\xi'_1)^2 + (A'_2)^2 (d\xi'_2)^2 + (A'_3)^2 (d\xi'_3)^2. \quad (10)$$

Коэффициенты A'_1, A'_2, A'_3 будут теперь соответствовать P'

$$\left. \begin{aligned} A'_1 &= A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \xi_1} \mu_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} \mu_2 + \frac{\partial A_1}{\partial \xi_3} \mu_3, \\ A'_2 &= A_2 + \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} \mu_1 + \frac{\partial A_2}{\partial \xi_2} \mu_2 + \frac{\partial A_2}{\partial \xi_3} \mu_3, \\ A'_3 &= A_3 + \frac{\partial A_3}{\partial \xi_1} \mu_1 + \frac{\partial A_3}{\partial \xi_2} \mu_2 + \frac{\partial A_3}{\partial \xi_3} \mu_3. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Выражения для компонент тензора деформации: $l \cdot dS = A_1 \cdot d\xi_1$. (12)

После деформации

$$l' \cdot dS' = A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \xi_1} \mu_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} \mu_2 + \frac{\partial A_1}{\partial \xi_3} \mu_3 \left(d\xi_1 + \frac{\partial \mu_1}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial \mu_1}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \frac{\partial \mu_1}{\partial \xi_3} d\xi_3 \right). \quad (13)$$

Пренебрегаем малыми величинами высшего порядка малости

$$l' \cdot dS' = A_1 d\xi_1 + d\xi_1 \left(\frac{\partial A_1}{\partial \xi_1} \mu_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} \mu_2 + \frac{\partial A_1}{\partial \xi_3} \mu_3 \right) + A_1 \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial \mu_1}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \frac{\partial \mu_1}{\partial \xi_3} d\xi_3 \right). \quad (14)$$

Т.к. $\xi'_1 - \xi_1 = \mu_1$, то $A_1(\xi'_1 - \xi_1) = U_1 = A_1 \mu_1$. Аналогично $U_2 = A_2 \cdot \mu_2$, $U_3 = A_3 \cdot \mu_3$.

Группируем слагаемые в выражении (14) для $l' \cdot dS'$

$$\frac{\partial A_1}{\partial \xi_1} \mu_1 + A_1 \frac{\partial \mu_1}{\partial \xi_1} = \frac{\partial}{\partial \xi_1} (A_1 \mu_1) = \frac{\partial U_1}{\partial \xi_1}. \quad (15)$$

Заменяем также $\mu_1 = \frac{U_1}{A_1}$, $\mu_2 = \frac{U_2}{A_2}$, $\mu_3 = \frac{U_3}{A_3}$, получим

$$\begin{aligned} l' \cdot dS' &= A_1 d\xi_1 + \frac{\partial U_1}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{U_2}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} d\xi_1 + \frac{U_3}{A_3} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_3} d\xi_1 + \\ &+ A_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{U_1}{A_1} \right) d\xi_2 + A_1 \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{U_1}{A_1} \right) d\xi_3. \end{aligned} \quad (16)$$

Введем элемент длины dS : $\partial \xi_1 = \frac{1}{A_1} dS$; $\partial \xi_2 = \frac{1}{A_2} dS$; $\partial \xi_3 = \frac{1}{A_3} dS$. Тогда

$$\begin{aligned} l' \cdot dS' &= l \cdot dS \left(1 + \frac{1}{A_1} \frac{\partial U_1}{\partial \xi_1} + \frac{U_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} + \frac{U_3}{A_1 A_3} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_3} \right) + \\ &+ m \cdot dS \left(\frac{A_1}{A_2} \right) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{U_1}{A_1} \right) + n \cdot dS \left(\frac{A_1}{A_3} \right) \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{U_1}{A_1} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

$$m' \cdot dS' = l \cdot dS \left(\frac{A_2}{A_1} \right) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{U_2}{A_2} \right) + m \cdot dS \left(1 + \frac{1}{A_2} \frac{\partial U_2}{\partial \xi_2} + \frac{U_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} + \frac{U_3}{A_2 A_3} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_3} \right) + n \cdot dS \frac{A_2}{A_3} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{U_2}{A_2} \right) \quad (18)$$

$$n' \cdot dS' = l \cdot dS \frac{A_3}{A_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{U_3}{A_2} \right) + m \cdot dS \frac{A_3}{A_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{U_3}{A_3} \right) + n \cdot dS \left(1 + \frac{1}{A_3} \frac{\partial U_3}{\partial \xi_3} + \frac{U_2}{A_2 A_3} \frac{\partial A_3}{\partial \xi_2} + \frac{U_1}{A_1 A_3} \frac{\partial A_3}{\partial \xi_1} \right) \quad (19)$$

Найдем относительную продольную деформацию линейного элемента $\varepsilon = \frac{P'Q' - PQ}{PQ}$.

Отсюда $P'Q' = (1 + \varepsilon)PQ = (1 + \varepsilon)dS$. Но $(P'Q')^2 = (l \cdot dS')^2 + (m' \cdot dS')^2 + (n' \cdot dS')^2$

Отбрасываем $\varepsilon^2, U_1^2, U_2^2, U_3^2, U_1 \cdot U_2, U_2 \cdot U_3, U_3 \cdot U_1, \left(\frac{\partial U_1}{\partial \xi_1} \right)^2, \left(\frac{\partial U_1}{\partial \xi_1} \right) U^2 \dots$

Учитываем тождество $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. Получим следующее представление для линейной деформации элемента, направление которого определяют косинусы углов l, m, n

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_1 l^2 + \varepsilon_2 m^2 + \varepsilon_3 n^2 + \gamma_{12} lm + \gamma_{13} ln + \gamma_{23} mn, \\ \varepsilon_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial U_1}{\partial \xi_1} + \frac{U_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} + \frac{U_3}{A_1 A_3} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_3}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial U_2}{\partial \xi_2} + \frac{U_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} + \frac{U_3}{A_2 A_3} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_3}, \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{A_3} \frac{\partial U_3}{\partial \xi_3} + \frac{U_2}{A_2 A_3} \frac{\partial A_3}{\partial \xi_2} + \frac{U_1}{A_1 A_3} \frac{\partial A_3}{\partial \xi_1}, \\ \gamma_{1,2} &= \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{U_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{U_1}{A_1} \right), \\ \gamma_{1,3} &= \frac{A_1}{A_3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{U_3}{A_3} \right) + \frac{A_3}{A_1} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{U_1}{A_1} \right), \\ \gamma_{2,3} &= \frac{A_3}{A_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{U_3}{A_3} \right) + \frac{A_2}{A_3} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{U_2}{A_2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Для оболочек принимаем $U_3 = Z$. Теория оболочек строится исходя из гипотезы прямых нормалей Кирхгофа. Поэтому

$$U_1 = U_{10} + Z \left(\frac{\partial U_1}{\partial Z} \right)_{Z=0}, \quad U_2 = U_{20} + Z \left(\frac{\partial U_2}{\partial Z} \right)_{Z=0}, \quad (21)$$

где U_{10} и U_{20} – перемещения точек срединной поверхности. Гипотеза прямых нормалей равносильна требованию обращения в ноль деформаций сдвига $\gamma_{1,3} = \gamma_{2,3} = 0$. Например $\gamma_{1,3}$ – искажения прямого угла между линейными элементами, параллельными осям X и Z . Точки нормали к недеформированной поверхности переходят в точки нормали к деформированной поверхности – угол не искажается, то есть $\gamma_{1,3} = 0$ и аналогично $\gamma_{2,3} = 0$. Из гипотезы Кирхгофа и формулы (20) следует:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{A_3} \frac{\partial U_1}{\partial \xi_3} - \frac{U_1}{A_1 A_3} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_3} + \frac{A_3}{A_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{U_3}{A_3} \right) &= 0, \\ \frac{A_3}{A_1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{U_3}{A_3} \right) + \frac{1}{A_3} \frac{\partial U_2}{\partial Z} - \frac{U_2}{A_2 A_3} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Заменяем ξ_3 на Z . Полагаем: $U_3 = w$, $A_1 = \alpha_1 \left(1 - \frac{Z}{R_1} \right)$, $A_2 = \alpha_2 \left(1 - \frac{Z}{R_2} \right)$, $A_3 = 1$, получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial Z} &= \frac{U_1}{\alpha_1 \left(1 - \frac{Z}{R_1} \right)} \frac{\partial A_1}{\partial Z} - \frac{1}{\alpha_1 \left(1 - \frac{Z}{R_1} \right)} \frac{\partial w}{\partial \xi_1}, \\ \frac{\partial U_2}{\partial Z} &= \frac{U_2}{\alpha_2 \left(1 - \frac{Z}{R_2} \right)} \frac{\partial A_2}{\partial Z} - \frac{1}{\alpha_2 \left(1 - \frac{Z}{R_1} \right)} \frac{\partial w}{\partial \xi_2}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Т. к. α_1 и α_2 от Z не зависят, то $\frac{\partial A_1}{\partial Z} = -\frac{\alpha_1}{R_1}$, $\frac{\partial A_2}{\partial Z} = -\frac{\alpha_2}{R_2}$. При $Z = 0$ получим:

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial Z} \right)_0 = -\frac{U_{10}}{R_1} - \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_1}, \quad \left(\frac{\partial U_2}{\partial Z} \right)_0 = -\frac{U_{20}}{R_2} - \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial w}{\partial \xi_2}. \quad (24)$$

Подставляем значения (24) в формулы для U_1 и U_2 :

$$U_1 = U_{10} - Z \left(\frac{U_{10}}{R_1} + \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right), \quad U_2 = U_{20} - Z \left(\frac{U_{20}}{R_2} + \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right). \quad (25)$$

Получим выражения компонент тензора деформации ε_1 , ε_2 , $\gamma_{1,2}$.

Подставляем в формулу (20) для ε_1 найденные выражения U_1 , U_2 (25), а также

$$\frac{\partial A_1}{\partial \xi_1}, \frac{\partial A_2}{\partial \xi_2}, \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1}, \frac{\partial A_2}{\partial \xi_2}, \text{ Находим } \varepsilon_1, \text{ аналогично } \varepsilon_2 \text{ и } \gamma_{1,2}$$

$$\left. \begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \left(\frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial U_{10}}{\partial \xi_1} + \frac{U_{20}}{\alpha_1 \alpha_2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} - \frac{w}{R_1} \right) - \\
&\quad - Z \left[\frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{U_{10}}{R_1} + \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right) + \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \left(\frac{U_{20}}{R_2} + \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right) \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} \right], \\
\varepsilon_2 &= \left(\frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial U_{20}}{\partial \xi_2} + \frac{U_{10}}{\alpha_1 \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} - \frac{w}{R_2} \right) - \\
&\quad - Z \left[\frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{U_{20}}{R_2} + \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right) + \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \left(\frac{U_{10}}{R_1} + \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right) \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} \right], \\
\gamma_{1,2} &= \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{U_{20}}{\alpha_2} \right) + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{U_{10}}{\alpha_1} \right) \right] - \\
&\quad - Z \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{U_{20}}{\alpha_2 R_2} + \frac{1}{\alpha_2^2} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{U_{10}}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\alpha_1^2} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right) \right].
\end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Формулы (26) представим в виде: $\varepsilon_1 = \varepsilon_{10} - Z\chi_1$; $\varepsilon_2 = \varepsilon_{20} - Z\chi_2$; $\gamma_{1,2} = \gamma_0 - 2Z\chi_{1,2}$. Выражения:

$$\left. \begin{aligned}
\varepsilon_{10} &= \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial U_{10}}{\partial \xi_1} + \frac{U_{20}}{\alpha_1 \alpha_2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} - \frac{w}{R_1}, \\
\varepsilon_{20} &= \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial U_{20}}{\partial \xi_2} + \frac{U_{10}}{\alpha_1 \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} - \frac{w}{R_2}, \\
\gamma_0 &= \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{U_{20}}{\alpha_2} \right) + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{U_{10}}{\alpha_1} \right).
\end{aligned} \right\} \quad (27)$$

представляют компоненты деформации срединной поверхности. Выражения:

$$\left. \begin{aligned}
\chi_1 &= \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{U_{10}}{R_1} + \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right) + \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \left(\frac{U_{20}}{R_2} + \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right) \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2}, \\
\chi_2 &= \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{U_{20}}{R_2} + \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right) + \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \left(\frac{U_{10}}{R_1} + \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right) \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1}, \\
\chi_{1,2} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{U_{20}}{\alpha_2 R_2} + \frac{1}{\alpha_2^2} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{U_{10}}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\alpha_1^2} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right) \right].
\end{aligned} \right\} \quad (28)$$

представляют изменения кривизны и кручения.

Выводы. Решена задача теории оболочек об упругой деформации основных несущих элементов высоконагруженной передачи с промежуточными телами качения – тонкостенных роликов. Определены компоненты тензора деформации, а также изменения кривизны и кручения срединной поверхности тонкостенного ролика. Решение необходимо для оценки упругих свойств как однослойной, так и

многослойной конструкции роликов.

Список литературы: 1. Ван Цзи Де. Прикладная теория упругости. М.: Физматгиз, 1959. – 400 с. 2. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л.: Судостроение, 1962.- 431 с.

Сдано в редакцию 29.04.05
Рекомендовано д.т.н., проф. Бухач А.

СТІЙКІСТЬ ОБОЛОНОК НУЛЬОВОЇ ГАУСОВОЇ КРИВИЗНИ ІЗ ВОЛОКНИСТИХ КОМПОЗИТІВ

Трач В.М. (НУВГП, м. Рівне, Україна)

The stability problem for the cylindrical shells made of laminated composite at the noncoincidence of directions layers reinforcement with axes of coordinates of a median surface is solved. Each layer of the composite is modelled by an anisotropic material with one plane of symmetry. The resolving function of the mixed variant of the shells theory are approximated by trigonometric serieses satisfying to boundary conditions. The stability of shells is researched at an axial compression, external pressure and torsion. The comparison with calculation dates obtained within the framework of model of an orthotropic body is carried out. The essential error of the buckling loads is shown in the case of using of this model for some structures of composites.

При намотуванні циліндричних оболонок просочені в'язучим армуючі волокна укладаються пошарово з відповідною орієнтацією в кожному шарі по відношенню до осей координат x , y , що співпадають з лініями головних кривизн координатної поверхні. Так створюється структура, що забезпечує необхідні параметри несучої здатності конструкцій при експлуатаційних навантаженнях.

Зв'язок принципів армування та стійкості оболонок із композитів розглядувались багатьма авторами при пружному [1, 5] і пружно-пластичному деформуванні [6]. У більшості зазначених робіт в розрахунковій моделі композита надавались властивості ортотропії. Ця властивість механічних характеристик моделі матеріалу достатньо добре узгоджується з реальними показниками композиту при поздовжньо-поперечному укладанні однонапрямлених шарів і дещо гірше – при багатошаровому симетричному намотуванні та незадовільно при однозаходному намотуванні. Очевидно, що така модель не може описувати характер деформування шаруватого композиту в оболонці при квазіізотропному укладанні шарів [10].

З наукової літератури відомі спроби використати в розрахунковій моделі оболонки з композиту з однією площиною пружної симетрії [2, 3]. Однак наближений характер постановки задачі стійкості негативно вплинув на достовірність отриманих результатів. Деякі з них були усунуті в роботі [9]. В [10] запропонована чисельна методика розрахунку на стійкість оболонок обертання із композитів з однією площиною пружної симетрії.

В цій роботі викладено аналітичний розв'язок задачі стійкості анізотропних циліндричних оболонок, який надає можливість проведення параметричних досліджень і аналізу взаємозв'язків між механічними властивостями армованих матеріалів з одноплщинною симетрією та особливостями втрати стійкості.