механика материалов. – 1980. – Т.16, № 3. –С.67-70. **3.** Сошко А.И. Механохимическая обработка металлов.// Полимеры в технологических процессах обработки металлов. Киев: Наук. Думка,1977.С.10-16. **4.** Бабейко Ю.Н. Физические основы импульсного упрочнения стали и чугуна. – Киев: Наукова думка, 1988. – 246 с. **5.** Бокштейн С.З. Строение и свойства металлических сплавов. – М.: Металлургия, 1971. – 496с. **6.** Захаров М.В., Захаров А.М. Жаропрочные сплавы. – М.: Металлургия, 1972. – 367 с. **7.** Физель Ж. Наклеп и распространение трещины // Атомный механизм разрушения. – М.: Металлургия, 1963. – С.504. **8.** Екобори Т. Физика и механика разрушения и прочности твердых тел. - М.: Металлургия, 1976. – 246 с.

Сдано в редакцию 29.04.05
Рекомендовано д.т.н., проф. Керекеш Т.

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ КООРДИНАТНЫХ ЛИНИЙ ТОНКОСТЕННОГО ЦИЛИНДРА В ПРОЦЕССЕ ЕГО ДЕФОРМАЦИИ

Стрельников В.Н. *(АО «НКМЗ», г. Краматорск, Украина)*

The analysis of coordinate grid modification at a strain of the thin cylinder is carried out The bending of a median surface without extensions, compression and angular distortions of a coordinate grid impact upon bending deformity through of the cylinder width, it is established Obtained data are used for a rate of stressed state and optimization of design parameters of elastic rollers in transmissions with intermediate rollers.

Введение. Традиционные конструкции зубчатых и червячных передач во многом исчерпали свои функциональные возможности. Современные тенденции наращивания производительности крупного высокотехнологичного оборудования сталкиваются с непомерным ростом габаритно - весовых характеристик механического привода. Единичные массы редукторов достигли многих десятков и даже сотен тонн, став одним из сдерживающих факторов прогрессивного развития тяжёлого машиностроения. Для повышения нагрузочной способности передающих механизмов используют многопоточные силовые кинематические схемы, в т. ч. с гибкими звеньями, упругие деформации которых упрощают технику дифференцирования силовых потоков. Многократно снижаются нагрузки на зубья, устраняются ограничения по критериям заедания, изгибным и контактным напряжениям, минимизируются габариты и металлоёмкость трансмиссий и приводных устройств. В передачах с промежуточными телами качения ролики выполненны в форме тонкостенных цилиндров – однослойных или многослойных (рис. 1). Определение упругих характеристик промежуточных тел качения – представляет актуальную задачу расчёта и проектирования новых разновидностей высоконагруженных передач зацеплением (рис. 2, 3).

Цель исследований представляет уровень влияния деформации тонкостенного ролика на кривизну и кручение сетки координатных линий.

Содержание работы. Получим формулы для определения изменения кривизны координатных линий срединной поверхности в результате ее деформации. За координатные линии принимаем параметризованную сеть ортогональных координатных линий, являющихся для поверхности линиями кривизны. Вначале получим вспомогательные формулы. Координаты точек недеформированной срединной поверхности обозначим ξ_1, ξ_2. Введем орты $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{k}$. Орт $\vec{e}_1$ направлен вдоль линии ξ_1, орт $\vec{e}_2$ вдоль линии ξ_2 и орт $\vec{k}$ перпендикулярный к $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ и образует с ними правую систему координат:

$\vec{k} = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ [1]. Элемент дуги срединной поверхности: $dS^2 = \alpha_1^2 \cdot d\xi_1^2 + \alpha_2^2 \cdot d\xi_2^2$.

Производные ортов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{k}$ по координатам ξ_1, ξ. (рис. 4) [2]

$$\frac{\partial \vec{k}}{\partial \xi_1} = -\frac{\alpha_1}{R_1}\vec{e}_1, \qquad \frac{\partial \vec{k}}{\partial \xi_2} = -\frac{\alpha_2}{R_2}\vec{e}_2. \tag{1}$$

При определении положения точек срединной поверхности радиусом вектором в силу непрерывности: $\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \xi_1 \, \partial \xi_2} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \xi_2 \, \partial \xi_1}$, или $\frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_1}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_2}\right)$, откуда следует

$$\frac{\partial}{\partial \xi_2} - (\alpha_1 \cdot \vec{e}_1) = \frac{\partial}{\partial \xi_1}(\alpha_2 \cdot \vec{e}_2). \tag{2}$$

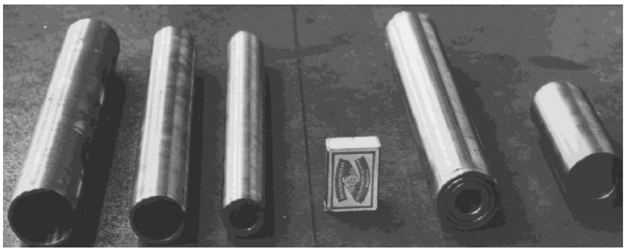

Рис.1. Многослойные ролики

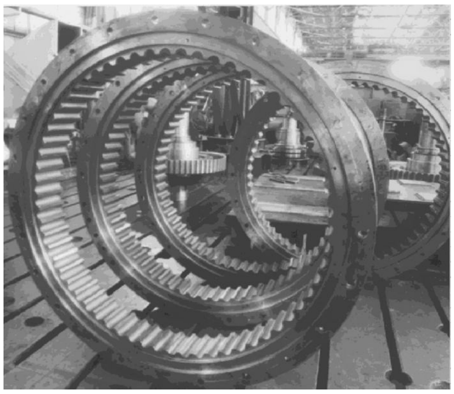

Рис. 2. Зубчатые колёса с внутренними круговыми зубьями

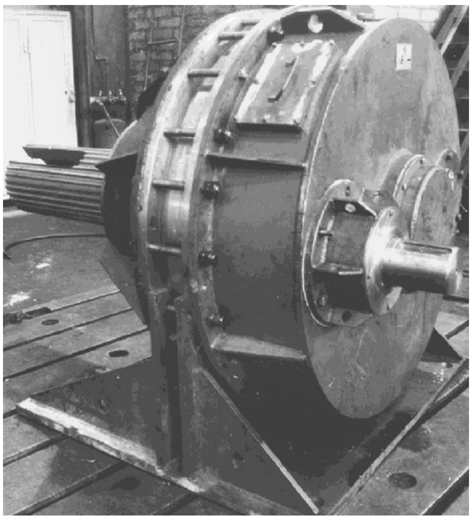

Рис. 3. Редуктор специальный с промежуточными телами качения

Найдем составляющие вектора $\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \xi_1}$, проецируя его на направления $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{k}$.

Определим проекцию $\dfrac{\partial \vec{e}_1}{\partial \xi_1}$ на направление $\vec{e}_2$. Составим :

$$\left(\vec{e}_2 \cdot \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \xi_1}\right) = \frac{\partial(\vec{e}_2 - \vec{e}_1)}{\partial \xi_1} - \left(\vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial \xi_1}\right) = -\left(\vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial \xi_1}\right), \tag{3}$$

откуда:

$$\frac{\partial \vec{e}_2}{\partial \xi_1} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2}(\alpha_1 \cdot \vec{e}_1) - \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} \vec{e}_2 . \tag{4}$$

Подставим выражение (4) в (3), получим значение проекции $\dfrac{\partial \vec{e}_1}{\partial \xi_1}$ на направление $\vec{e}_2$

$$\left(\vec{e}_2 \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \xi_1}\right) = -\frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2}. \tag{5}$$

Находим проекцию $\dfrac{\partial \vec{e}}{\partial \xi_1}$ на $\vec{k}$. Составим скалярное произведение [3]

$$\left(\vec{k} \cdot \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \xi_1}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\vec{k} \cdot \vec{e}_1\right) - \left(\vec{e}_1 \frac{\partial \vec{k}}{\partial \xi_1}\right),$$

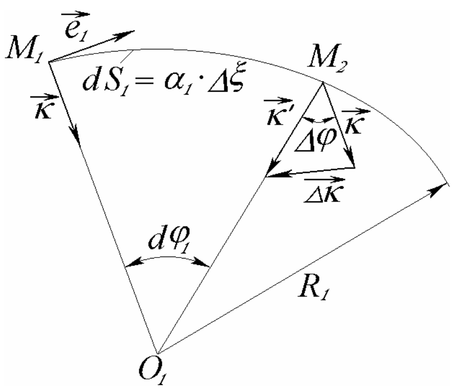

Рис. 3. Определение частной производной орта нормали к срединной поверхности

откуда
$$\frac{\partial \vec{k}}{\partial \xi_1} = -\left(\frac{\alpha_1}{R_1} \cdot \vec{e}_1\right). \tag{6}$$

Получим $$\left(\vec{k} \cdot \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \xi_1}\right) = \frac{\alpha_1}{R_1}(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) = \frac{\alpha_1}{R_1}.$$

В результате получим разложение:

$$\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \xi_1} = -\frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} \vec{e}_2 + \frac{\alpha_1}{R_1} \vec{k}, \tag{7}$$

и аналогично
$$\frac{\partial \vec{e}_2}{\partial \xi_2} = -\frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} \vec{e}_1 + \frac{\alpha_2}{R_2} \vec{k}. \tag{8}$$

Найдем разложение производной $\dfrac{\partial \vec{e}_1}{\partial \xi_2}$. Т. к. $\left(\vec{e}_1 \cdot \dfrac{\partial \vec{e}_1}{\partial \xi_2}\right) = 0$, то вектор $\vec{e}_1$ может иметь составляющие по ортам $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Воспользуемся соотношением

$$\frac{\partial(\alpha_1 \cdot \vec{e}_1)}{\partial \xi_2} = \frac{\partial(\alpha_2 \cdot \vec{e}_2)}{\partial \xi_1}, \qquad \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} \vec{e}_1 + \alpha_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} = \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} \vec{e}_1 + \alpha_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1},$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} \vec{e}_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial \xi_1} - \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_1} \vec{e}_1.$$ Находим:

$$\left.\begin{aligned} &\vec{e}_2 \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \xi_2} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1}(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\left(\vec{e}_2 \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial \xi_1}\right) - \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_1}(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1) = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1}, \\ &\vec{k} \cdot \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \xi_2} = \frac{\partial}{\partial \xi_2}(\vec{k} \cdot \vec{e}_1) - (\vec{e}_1 \frac{\partial \vec{k}}{\partial \xi_2}) = 0 . \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

В результате получим разложения:

$$\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \xi_2} = \frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1}\vec{e}_2 , \qquad \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial \xi_1} = \frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2}\vec{e}_1 . \tag{10}$$

При деформации срединной поверхности ее точки получают смещения U_{10}, U_{20}, W. Координатные линии ξ_1, ξ_2 переходят в линии ξ_1^*, ξ_2^*, а орты $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{k}$ в $\vec{e}_1^{\,*}, \vec{e}_2^{\,*}, \vec{k}^{\,*}$

$$\vec{e}_1^{\,*} = \vec{e}_1 + w_1\vec{e}_2 - v_1\vec{k}, \qquad \vec{e}_2^{\,*} = w_2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - v_2\vec{k}, \qquad \vec{k}^{\,*} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + \vec{k}. \tag{11}$$

Выразим w_1, w_2, v_1, v_2 через U_{10}, U_{20}, W и их производные. Введем радиус вектор $\vec{R}$ деформированной срединной поверхности оболочки

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{U} = \vec{r} + \vec{U}_{10}\vec{e}_1 + \vec{U}_{20}\vec{e}_2 + W\cdot\vec{k} . \tag{11}$$

Дифференцируем $\vec{R}$ по ξ_1

$$\begin{gathered}\frac{\partial \vec{R}}{\partial \xi_1} = \left(\alpha_1 + \frac{\partial U_{10}}{\partial \xi_1} + \frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2}U_{20} + \frac{\alpha_1}{R_1}W\right)\vec{e}_1 \\ + \left(\frac{\partial U_{20}}{\partial \xi_1} - \frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2}U_{10}\right)\vec{e}_2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \xi_1} + \frac{\alpha_1}{R_1}U_{10}\right)\vec{k} .\end{gathered} \tag{12}$$

Делим равенство (12) на α_1 и введем представление:

$$\frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial \vec{R}}{\partial \xi_1} = (1 + \in_1)\vec{e}_1 + w_1\cdot\vec{e}_2 - v_1\cdot\vec{k} , \tag{13}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \in_1 &= \frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial U_{10}}{\partial \xi_1} + \frac{1}{\alpha_1\cdot\alpha_2}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2}U_{20} + \frac{1}{R}W , \\ w_1 &= \frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial U_{20}}{\partial \xi_1} - \frac{1}{\alpha_1\cdot\alpha_2}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2}U_{10} , \qquad -v_1 = \frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial W}{\partial \xi_1} + \frac{\partial U_{10}}{R_1} . \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Аналогично:

$$\frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial \vec{R}}{\partial \xi_2} = w_2\cdot\vec{e}_1 - (1 + \in_2)\vec{e}_2 - v_2\vec{k} , \tag{15}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \in_2 &= \frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial U_{20}}{\partial \xi_2} + \frac{1}{\alpha_1\cdot\alpha_2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1}U_{10} + \frac{W}{R_2} , \\ w_2 &= \frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial U_{10}}{\partial \xi_2} - \frac{1}{\alpha_1\cdot\alpha_2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1}U_{20} , \qquad -v_2 = \frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial W}{\partial \xi_2} + \frac{\partial U_{20}}{R_2} . \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Определим орты координатных линий

$$\vec{e}_1^{\,*} = \frac{1}{\alpha_1^*}\frac{\partial \vec{R}}{\partial \xi_1}, \qquad \vec{e}_2^{\,*} = \frac{1}{\alpha_2^*}\frac{\partial \vec{R}}{\partial \xi_2}, \qquad (\vec{e}_1^{\,*}\cdot\vec{e}_1^{\,*}) = 1 = \frac{1}{(\alpha_1^*)^2}\left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial \xi_1}\cdot\frac{\partial \vec{R}}{\partial \xi_1}\right). \tag{17}$$

Отсюда определим

$$\alpha_1^* = \sqrt{\frac{\partial \vec{R}}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \vec{R}}{\partial \xi_1}}. \qquad (18)$$

Из равенства (13) с точностью до малых высшего порядка малости определяем

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial \xi_1} \approx \alpha_1 (1+\in) \vec{e}_1. \qquad (19)$$

Находим приближенное значение α_1^* и α_2^*

$$\alpha_1^* \approx \alpha_1 (1+\in_1), \qquad \alpha_2^* \approx \alpha_2 (1+\in_2). \qquad (20)$$

Отбросим малые величины высшего порядка малости и получим разложение:

$$\left.\begin{aligned} e_1^* &= \vec{e}_1 + \frac{w_1}{1+\in_1}\vec{e}_2 - \frac{v_1}{1+\in_1}\vec{k} \approx \vec{e}_1 + w_1\vec{e}_2 - v_1\vec{k}, \\ \vec{e}_2^* &= w_2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - v_2\vec{k}, \\ \vec{k}^* &\approx \vec{e}_1 v_1 + \vec{e}_2 v_2 + \vec{k}. \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Находим кривизну деформированной координатой линии в предположении, что срединная поверхность изгибается без растяжений и сжатий.

$$\frac{1}{R_1^*} = \lim_{\Delta S \to 0}\left(\frac{\Delta \vec{e}_1^*}{\Delta S_1} \cdot \vec{k}^*\right) = \left(\frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{\partial \vec{e}_1^*}{\partial \xi_1} \cdot \vec{k}^*\right). \qquad (22)$$

Находим множитель, входящий в выражение (22)

$$\frac{\partial \vec{e}_1^*}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial w_1}{\partial \xi_1}\vec{e}_2 + w_1 \frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2}\vec{e}_1 - \frac{\partial v_1}{\partial \xi_1}\vec{k} - v_1 \frac{\alpha_1}{R_1}\vec{e}_1. \qquad (23)$$

Подставим значения выражений (21) и (23) в формулу (22) с учетом формулы (7)

$$\frac{1}{R_1^*} = \frac{1}{\alpha_1}\left(\vec{e}_1 v_1 + \vec{e}_2 v_2 + \vec{k}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2}\vec{e}_2 + \frac{\alpha_1}{R_1}\vec{k} + \frac{\partial w_1}{\partial \xi_1}\vec{e}_2\right) +$$

$$+\left(\frac{w_1}{\alpha_2}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_2} - v_1 \frac{\alpha_1}{R_1}\right)\vec{e}_1 - \frac{\partial v_1}{\partial \xi_1}\vec{k}.$$

Отбрасываем малые величины высшего порядка малости:

$$\frac{1}{R_1^*} = \left(-\frac{v_2}{\alpha_2}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} + \frac{\alpha_1}{R_1} - \frac{\partial v_1}{\partial \xi_1}\right)\frac{1}{\alpha_1}. \qquad (24)$$

Заменим v_1, и v_2 по формулам (14), (16):

$$\frac{1}{R_1^*} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\frac{U_{10}}{R_1} + \frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial w}{\partial \xi_1}\right) + \frac{1}{\alpha_1 \cdot \alpha_2}\left(\frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial w}{\partial \xi_2} + \frac{U_{20}}{R_2}\right)\frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2}. \qquad (25)$$

Находим изменение кривизны

$$\chi_1 = \frac{1}{R_1^*} - \frac{1}{R_1}. \qquad (26)$$

Из формулы (25) следует

$$\chi_1 = \frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{U_{10}}{R_1} + \frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial w}{\partial\xi_1}\right) + \frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\left(\frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial w}{\partial\xi_2} + \frac{U_{20}}{R_2}\right)\frac{\partial\alpha_1}{\partial\xi_2}. \qquad (27)$$

Формулы для $\varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ \gamma_{1,2}$ представим в виде:

$$\in_1 = \in_{10} - Z\chi_1; \qquad \in_2 = \in_{20} - Z\chi_2; \qquad \gamma_{1,2} = \gamma_0 - 2Z\chi_{1,2}. \qquad (28)$$

Выражения компонент деформации срединной поверхности:

$$\left.\begin{aligned}
\in_{10} &= \frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial U_{10}}{\partial\xi_1} + \frac{U_{20}}{\alpha_1\alpha_2}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\xi_2} - \frac{w}{R_1},\\
\in_{20} &= \frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial U_{20}}{\partial\xi_2} + \frac{U_{10}}{\alpha_1\alpha_2}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\xi_1} - \frac{w}{R_2},\\
\gamma_0 &= \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{U_{20}}{\alpha_2}\right) + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{U_{10}}{\alpha_1}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Выражения изменения кривизны и кручения срединной поверхности:

$$\left.\begin{aligned}
\chi_1 &= \frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{U_{10}}{R_1} + \frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial w}{\partial\xi_1}\right) + \frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\left(\frac{U_{20}}{R_2} + \frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial w}{\partial\xi_2}\right)\frac{\partial\alpha_1}{\partial\xi_2},\\
\chi_2 &= \frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{U_{20}}{R_2} + \frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial w}{\partial\xi_2}\right) + \frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\left(\frac{U_{10}}{R_1} + \frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial w}{\partial\xi_1}\right)\frac{\partial\alpha_2}{\partial\xi_1},\\
\chi_{1,2} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{U_{20}}{\alpha_2 R_2} + \frac{1}{\alpha_2^2}\frac{\partial w}{\partial\xi_2}\right) + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{U_{10}}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\alpha_1^2}\frac{\partial w}{\partial\xi_1}\right)\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Сопоставляя выражения (27) и (30), убеждаемся, что величина χ_1, входящая в формулу (28), для $\in_1$ действительно представляет изменение кривизны координатной линии ξ_1. Аналогично устанавливаем смысл величины χ_2. Таким образом изгибные деформации оболочки определяются изгибанием срединной поверхности.

Определим кручение исходной координатной сетки

$$\chi_{1.2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\vec{e}_1}{\partial S_2}\cdot\vec{k}\right) + \left(\frac{\partial\vec{e}_2}{\partial S_1}\cdot\vec{k}\right)\right] = \frac{1}{2\alpha_2}\left(\frac{\partial\vec{e}_2}{\partial\xi_2}\cdot\vec{k}\right) + \frac{1}{2\alpha_1}\left(\frac{\partial\vec{e}_2}{\partial\xi_1}\cdot\vec{k}\right). \qquad (31)$$

Производные ортов $\frac{\partial\vec{e}_1}{\partial\xi_2}$ и $\frac{\partial\vec{e}_2}{\partial\xi_1}$ заменим по формулам (10):

$$\chi_{1,2} = \frac{1}{2\alpha_2}\left(\frac{1}{\alpha_1}\cdot\frac{\partial\alpha_2}{\partial\xi_1}\right)(\vec{e}_2\cdot\vec{k}) + \frac{1}{2\alpha_1}\left(\frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\xi_2}\right)(\vec{e}_1\cdot\vec{k}). \qquad (32)$$

В силу ортогональности разноименных ортов из формулы (32) получим $X_{1,2} = 0$.

Вычислим изменение кручения элемента срединной поверхности без учета деформации сдвига. Пренебрегаем искажением угла между координатными линиями ξ_1 и ξ_2 вследствие деформации сдвига. Т.к. для исходной координатной сетки ξ_1, ξ_2 кручение равно нулю, то изменение кручения деформированной сетки равно ее кручению.

Изменение кручения вычисляем по формуле

$$\chi^*_{1.2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\vec{e}^{\,*}_1}{\partial S_2}\cdot\vec{k}^*\right) + \left(\frac{\partial\vec{e}^{\,*}_2}{\partial S_1}\cdot\vec{k}^*\right)\right] == \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{\partial\vec{e}^{\,*}_1}{\partial\xi_2}\cdot\vec{k}^*\right) + \frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{\partial\vec{e}^{\,*}_1}{\partial\xi_1}\cdot\vec{k}^*\right)\right]. \qquad (33)$$

Пользуясь формулами (21), (10), (8), (1), находим:

$$\frac{\partial\vec{e}_1^{\,*}}{\partial\xi_2}=\frac{w_1}{\alpha_1}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\xi_1}\vec{e}_1+\left(\frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\xi_1}+\frac{\partial w_1}{\partial\xi_2}v_1\frac{\alpha_2}{R_2}\right)\vec{e}_2+\left(w_1\frac{\alpha_2}{R_2}-\frac{\partial v_1}{\partial\xi_2}\right)\vec{k}. \qquad (34)$$

Пользуясь выражениями (34), (21), определяем значения.

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{\partial\vec{e}_1^{\,*}}{\partial\xi_2}\cdot\vec{k}^*\right)&=\frac{1}{\alpha_1\cdot\alpha_2}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\xi_1}v_2-\frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial v_1}{\partial\xi_2}+\frac{1}{R_2}w_1,\\ \frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{\partial\vec{e}_2^{\,*}}{\partial\xi_1}\cdot\vec{k}^*\right)&=\frac{1}{\alpha_1\cdot\alpha_2}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\xi_2}v_1-\frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial v_2}{\partial\xi_1}+\frac{1}{R_1}w_2.\end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

При составлении скалярного произведения отбрасываем величины высшего порядка малости.

Подставим формулы (35) в формулу (33):

$$\begin{aligned}\chi_{1,2}^*=\frac{1}{2}\Bigg[&\frac{1}{\alpha_1\cdot\alpha_2}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\xi_1}v_2+\frac{1}{\alpha_2\cdot\alpha_1}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\xi_2}v_1-\frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial v_1}{\partial\xi_2}-\\ &-\frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial v_2}{\partial\xi_1}\Bigg]+\frac{1}{2}\left(\frac{w_2}{R_1}+\frac{w_1}{R_2}\right)=\chi_{1,2}+w,\end{aligned} \qquad (36)$$

где $\chi_{1.2}=\frac{1}{2}\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{1}{\alpha_2^2}\frac{\partial w}{\partial\xi_2}+\frac{U_{10}}{\alpha_2\cdot R_2}\right)+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{1}{\alpha_1^2}\frac{\partial w}{\partial\xi_1}+\frac{U_{20}}{\alpha_1\cdot R_1}\right)\right]$. (37)

Сравниваем выражения (37) и (30) Они получились одинаковыми. Таким образом в силу формулы (28) деформация сдвига по толщине оболочки действительно связана с кручением срединной поверхности. Отброшенная величина

$$w=\frac{1}{2}\left(\frac{w_1}{R_1}+\frac{w_2}{R_2}\right), \qquad (38)$$

где w_1 и w_2 определяются из (14), (16) и характеризуют деформацию сдвига срединной поверхности

Выводы. В результате анализа изменения сетки координатных линий при деформации тонкой оболочки установлено: на изгибные деформации по толщине оболочки оказывает влияние изгибание срединной поверхности без растяжений, сжатий и искажений углов координатной сетки. Полученные результаты используются при оценке напряжённого состояния цилиндрической оболочки, а также для оптимизации конструктивных параметров роликов в передачах с промежуточными телами качения.

Список литературы: 1. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. – 488 с. **2.** Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л.: Судостроение, 1962.- 431 с. **3.** Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М. Физматгиз, 1963. – 635 с.

Сдано в редакцию 29.04.05
Рекомендовано д.т.н., проф. Бухач А.