

1973, 238 с. **3.** Дамаскин Б.И. Некоторые вопросы теории расчета и проектирования вытяжного прибора прядильной машины: Ар. дисс. ... докт. техн. наук. – М, 1954 - 23 с. **4.** Клименко В.М., Онищенко А.М. Кинематика и динамика процессов прокатки: М., Металлургия, 1984, 232с. **5.** Клименко В.М., Онищенко А.М., Минаев А.А., Горелик В.С. Технология прокатного производства: Учеб. пособие.- К.: Вища шк. Голов. изд-во, 1989.-311с. **6.** Кугушев И.Д. Теория процессов отлива и обезвоживания бумажной массы. – М.: Лесная промышленность 1967. **7.** Кузнецов Г.К. Динамика текстильных машин: Учебн. пособие. – Кострома.: КТИ, 1992. – 110 с. **8.** Новиков Н.Е. Прессование бумажного полотна. – М.: Легкая промышленность, 1972. – 248 с. **9.** Фомин Ю.Г., Кузнецов Г.К., Киселев И.А. Конструкция и расчет механизмов валковых машин для обработки тканей. Иваново.: Ив. Гос. текстильная академия, 1994. - 196 с. **10.** Целиков А.И. Теория прокатки. М. 1981. **11.** Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. Т. II – М.: Наука, 1965. – 480 с. **12.** Кузнецов Г.К. Исследование и методика проектирования валковых отжимных устройств текстильных машин. – Ар. дисс... докт. техн. наук. – Кострома, 1970. – 27 с. **13.** Фомин Ю.Г. Разработка теоретических основ и средств повышения эффективности обработки тканей валковыми модулями отделочных машин: Ар. дисс. ... докт. техн. наук. - Иваново: Ив. гос. текстильная академия. 2001. – 41 с. **14.** Nissan A. Functions of the felts in water removal on the papermaking machine –Тарпи, 1954, 37, n 12, p 597-606. **15.** Ризаев А.А., Бахадиров Г.А., Баклушин М.Б. Определение центра масс элемента кожполуфабриката между двумя валами. Узбекский журнал. Проблемы механики, №3, 2002 г. стр.32-36. 16.

Сдано в редакцию 05.04.05

Рекомендовано д.т.н., проф. Седуш В.Я.

ВИЗНАЧЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ У АНІЗОТРОПНИХ ТОВСТИХ ПЛАСТИНАХ

Божидарнік В.В. , Максимович О.В. (ЛДТУ, м. Луцьк, Україна)

The generalized method of separation of variables enabling to get the solutions of wide class of 3D non-stationary heat conduction problems on the basis of 1D and 3D parabolic equation solutions, is shown. The other approximate and exact methods of temperature definition in plates, that are based on reducing of equation dimension were presented in [1, 3, 4, 6].

Задачам визначення нестационарних температурних полів у ізотропних і анізотропних тілах циліндричної форми присвячена велика кількість робіт. Для розв'язування таких задач використовуються інтегральні перетворення Фур'є або Ганкеля за просторовими координатами та Лапласа за часовою координатою; розвинення у ряд за відповідними ортогональними функціями вздовж твірної. Для тонких пластинок широко застосовуються наближені розв'язки, у яких тривимірна задача зводиться до відповідних двовимірних задач [5, 6], що значно спрощує розв'язування конкретних задач.

У [2, 3] показано, що для паралелепіпеда, температура якого у початковий момент часу записується у вигляді добутку функцій з відокремленими змінними, температурне поле може бути зображене у вигляді добутку функцій, які є розв'язками одновимірних задач теплопровідності.

У пропонованій роботі ці результати узагальнено на випадок анізотропних пластин, які перебувають в умовах теплообміну з середовищем із нерівномірно розподіленою температурою.

Постановка задачі. Розглянемо теплопровідне циліндричне анізотропне тіло, що нагрівається шляхом теплообміну із зовнішнім середовищем згідно із законом Ньютона. Введемо декартову систему координат (x, y, z) так, щоби площина $z=0$ збігалась з площиною симетрії теплофізичних характеристик. Температура T у цьому випадку визначається із крайової задачі

$$\left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) T = 0, \quad (x, y, z) \in D, \quad \tau > 0,$$

$$M_z T = b_{1,2} P(x, y, \tau), \quad z = z_1, z_2, \quad (x, y) \in D_0, \quad \tau > 0, \quad (1)$$

$$M_L T = 0, \quad (x, y) \in L, \quad z \in D_z, \quad \tau > 0, \quad T|_{\tau=0} = 0, \quad (x, y, z) \in D,$$

де D – область, яку займає тіло ($z \in D_z, (x, y) \in D_0$); D_0 – область, утворена в результаті перетину області D і площини $z = const$; D_z – область $z_1 < z < z_2$, де z_1, z_2 – сталі; $\tau = \frac{c\rho}{\gamma_{33}} t$; t – час; c – питома теплоємність матеріалу; ρ – густина; $b_1 P, b_2 P$ – температури зовнішнього середовища, що омивають відповідно площини $z = z_{1,2}$, причому $b_{1,2}$ – сталі;

$$\Delta = \frac{1}{\gamma_{33}} \left(\gamma_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\gamma_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \gamma_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right); \quad M_z T = \frac{1}{\alpha} \left(\pm \gamma_{33} \frac{\partial}{\partial z} + \alpha \right) T \quad \text{при } z = z_{1,2};$$

$$M_L T = \frac{1}{\alpha} (-q_n + \alpha) T.$$

Тут γ_{ij} – коефіцієнти теплопровідності, причому приймається, що $\gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$; α – коефіцієнт тепловіддачі, що приймає відповідно значення $\alpha_{1,2}$ на торцевих площинах $z = z_{1,2}$ та α_L – для бічної поверхні ($(x, y) \in L, z \in D_z$), причому $\alpha = \alpha(x, y)$; q_n – тепловий потік через бічні поверхні тіла, який визначається за формулами

$$q_n = q_x \cos(n, x) + q_y \cos(n, y), \quad q_x = - \left(\gamma_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + \gamma_{12} \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad q_y = - \left(\gamma_{12} \frac{\partial T}{\partial x} + \gamma_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right).$$

Зауважимо, що введені для зручності сталі $b_{1,2}$ дозволяють одночасно розглядати різні задачі про нагрів тіла через площини $z = z_1$ і $z = z_2$. Наприклад, якщо нагрів здійснюється тільки через границю $z = z_1$, то покладаємо $b_1 = 1, b_2 = 0$.

Допоміжна задача. Для розв'язування поставленої задачі наведемо розв'язок допоміжної задачі теплопровідності, який буде використовуватись далі як фундаментальний. В цій задачі приймемо $P = f(x, y) \delta_+(\tau)$, де $\delta_+(\tau)$ – дельта-функція Дірака. Тоді розв'язком задачі (1) буде $T = G$, де $G = Z(z, \tau) F(x, y, \tau)$.

Тут функція $Z(z, \tau)$ визначається із крайової задачі виду

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \tau}\right)Z = 0, \quad z \in D_z; \quad (2)$$

$$M_z Z = b_k \delta_+(\tau) \quad \text{при} \quad z = z_k; \quad Z|_{\tau=0} = 0, \quad z \in D_z.$$

Функція $F(x, y, \tau)$ є відповідно розв'язком задачі

$$\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial \tau}\right)F = 0, \quad (x, y) \in D_0; \quad (3)$$

$$M_L F = 0, \quad (x, y) \in L; \quad F|_{\tau=0} = f(x, y), \quad (x, y) \in D_0.$$

Справедливість наведеного розв'язку перевіряється шляхом безпосередньої підстановки функції G у рівняння та граничні і початкову умови (1).

Використовуючи метод суперпозиції, на основі наведеного фундаментального розв'язку можна отримати розв'язки більш загальних задач.

Задача 1. Розглянемо випадок, коли у співвідношеннях (1) $P(x, y, \tau) = q(\tau)f(x, y)$, де q – задана функція.

Тоді отримаємо розв'язок задачі теплопровідності у вигляді

$$T = \int_0^{\tau} q(\tau - \eta)Z(z, \eta)F(x, y, \eta)d\eta. \quad (4)$$

У правильності формули (4) можна переконатись безпосередньо, якщо підставити цей розв'язок у рівняння, початкові та граничні умови (1), аналогічно, як це виконано для паралелепіпеда у [2, 3].

Задача 2. Розглянемо тепер більш загальний випадок, коли задана в (1) функція має вигляд $P = f(x, y, \tau)$. Для цього випадку фундаментальний розв'язок G^* зобразимо у вигляді

$$G^* = Z(z, \tau)F^*(x, y, \tau, \eta),$$

де функція F^* визначаються з наведених вище співвідношень, за яким знаходиться функція F при заміні $f(x, y)$ на $f(x, y, \eta)$, при цьому параметр η розглядається як відома стала. На основі нього розв'язок задачі (1) набуде вигляду

$$T = \int_0^{\tau} Z(z, \eta)F^*(x, y, \eta, \tau - \eta)d\eta. \quad (5)$$

Визначення допоміжних функцій. У наведений розв'язок ввійшли функції Z, F . Задача для визначення функції Z є класичною одновимірною задачею теплопровідності для ізотропного шару, для якої наведені розв'язки в [2, 3].

Розглянемо задачу визначення функції F . Для цього спочатку спростимо цю задачу. Запишемо рівняння для визначення функції F у вигляді

$$\Omega F - \frac{\partial F}{\partial \tau} = 0, \quad (x, y) \in D_z, \quad \tau > 0, \quad (6)$$

$$\text{де } \Omega F = \left(\lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\lambda_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) F, \quad \lambda_1 = \gamma_{11} / \gamma_{33}, \quad \lambda_{12} = \gamma_{12} / \gamma_{33}, \quad \lambda_2 = \gamma_{22} / \gamma_{33}.$$

Перейдемо до нових змінних, які введемо так $\xi = x + ay$, $\eta = by$, де

$$a = -\lambda_{12} / \lambda_2, \quad b = \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_{12}^2}}{\lambda_2}. \quad (7)$$

Тоді диференціальний оператор в новій системі координат набуде вигляду

$$\Omega F = \lambda \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \Theta, \quad (8)$$

$$\text{де } \lambda = \frac{\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_{12}^2}{\lambda_2}, \quad \Theta(\xi, \eta) = F(x, y) \text{ при заміні } x = x(\xi, \eta) = \xi - \frac{a}{b} \eta, \quad y = y(\xi, \eta) = \frac{\eta}{b}.$$

Прийmemo, що в основній системі координат рівняння контуру описується параметрично $x = \varphi(\theta)$, $y = \psi(\theta)$, $0 < \theta \leq 2\pi$. Введемо далі прямокутну систему координат (ξ, η) , в якій границі L буде відповідати крива Γ , що задана параметрично формулою $\xi = \Phi(\theta)$, $\eta = \Psi(\theta)$, де $\Phi(\theta) = \varphi(\theta) + a\psi(\theta)$, $\Psi(\theta) = b\psi(\theta)$. Позначимо область, що відповідає області D_0 в новій системі координат через Λ . В цій області на основі формули (8) маємо, що функція F задовольняє рівнянню

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \Theta - \frac{\partial \Theta}{a_* \partial t} = 0, \quad (9)$$

тобто має такий же вигляд, як і у випадку ізотропної пластинки. Тут позначено $a_* = c\rho / (\gamma_{33}\lambda)$.

Запишемо тепер граничну умову для функції F в нових змінних. Для цього знайдемо потік тепла, що проходить через криву L в новій системі координат.

$$-q_n = \frac{S'}{s'} \left[\frac{1}{b} (\lambda_1 + a\lambda_{12}) \frac{\partial \xi}{\partial N} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} + b\lambda_2 \frac{\partial \eta}{\partial N} \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right] = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_{12}^2} \frac{S'}{s'} \frac{\partial \Theta}{\partial N},$$

де $S'(t) = \sqrt{\Phi'^2 + \Psi'^2}$, $s'(t) = \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}$, $\partial \Theta / \partial N$ – нормальна похідна до границі Γ .

На основі отриманого виразу для потоку гранична умова (3) у нових змінних запишеться

$$\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial N} + \alpha_* \Theta = 0, \quad (10)$$

$$\text{де } \alpha_*(\xi, \eta) = b \frac{S'}{S'} \alpha(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)).$$

Початкова умова переписується

$$\Theta|_{t=0} = f_*(\xi, \eta), \quad \text{де } f_*(\xi, \eta) = f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)).$$

Таким чином отримали, що в новій системі координат задача для знаходження функції F є такою ж, як і задача теплопровідності на площині для ізотропних матеріалів, для якої в літературі розроблено ефективні алгоритми розв'язування.

Локалізований нагрів пластини. На практиці широко використовується опис нагріву згідно закону Гауса. Тоді $f = C \exp(-k_1 x^2 - k_2 y^2)$, де сталі k_1, k_2 характеризують зосередженість нагріву. В нових змінних (ξ, η) права частина має громіздкий вигляд. Тому перейдемо далі від неї до повернутої системи координат (ξ', η') , яку введемо так

$$\xi = \xi' \cos \alpha + \eta' \sin \alpha, \quad \eta = -\xi' \sin \alpha + \eta' \cos \alpha,$$

де α – незаданий кут. Враховуючи, що в цих змінних

$$x = (\cos \alpha - A \sin \alpha) \xi' + (\sin \alpha + A \cos \alpha) \eta', \quad y = B(-\sin \alpha \xi' + \cos \alpha \eta'),$$

маємо

$$\begin{aligned} k_1 x^2 + k_2 y^2 = & \left[k_1 (\cos \alpha - A \sin \alpha)^2 + k_2 B^2 \sin^2 \alpha \right] \xi'^2 + \\ & + \left[k_1 (\sin \alpha + A \cos \alpha)^2 + k_2 B^2 \cos^2 \alpha \right] \eta'^2 + \\ & + 2 \left[k_1 (\cos \alpha - A \sin \alpha) (\sin \alpha + A \cos \alpha) + k_2 B^2 \sin \alpha \cos \alpha \right] \xi' \eta', \end{aligned}$$

де $A = -a/b$, $B = 1/b$. Виберемо кут α так, щоби вираз в дужках біля $\xi' \eta'$ дорівнював нулю. Звідси отримаємо

$$\alpha = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2k_1 A}{k_1(1-A^2) - k_2 B^2}.$$

Тоді в нових змінних маємо $f = \exp(-q_1 \xi'^2 - q_2 \eta'^2)$, де

$$q_1 = k_1 \frac{\cos^2(\alpha + \gamma)}{\cos^2 \gamma} + k_2 B^2 \sin^2 \alpha, \quad q_2 = k_1 \frac{\sin^2(\alpha + \gamma)}{\cos^2 \gamma} + k_2 B^2 \cos^2 \alpha.$$

Тут $\gamma = \operatorname{arctg} A$. Зазначимо, що оператор Лапласа в змінних (ξ, η) переходить в оператор Лапласа в змінних (ξ', η') . Тому рівняння для знаходження функції F запишеться

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi'^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta'^2} \right) \Theta' - \frac{\partial \Theta'}{a_* \partial t} = 0,$$

при початковій умові $\Theta'|_{t=0} = \exp(-q_1 \xi'^2 - q_2 \eta'^2)$.

Розглянемо випадок нескінченної пластини. Тоді на основі [2] маємо, що розв'язок цієї задачі буде

$$\Theta'(\xi', \eta', t) = \Theta_1(\xi', t) \Theta_2(\eta', t),$$

де функції $\Theta_{1,2}$ є розв'язками одновимірних задач

$$\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial \xi'^2} - \frac{\partial \Theta_1}{a_* \partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial \xi'^2} - \frac{\partial \Theta_2}{a_* \partial t} = 0,$$

що задовольняють початковим умовам $\Theta_1|_{t=0} = \exp(-q_1 \xi'^2)$, $\Theta_2|_{t=0} = \exp(-q_1 \eta'^2)$. На основі [2] тоді отримаємо

$$\Theta' = S(\xi', a_* t, q_1) S(\xi', a_* t, q_2),$$

де

$$S(x, \tau, k) = \frac{1}{\sqrt{1+4k\tau}} \exp\left(-\frac{kx^2}{1+4k\tau}\right).$$

Таким чином знаходимо температуру у вигляді

$$T(x, y, \tau) = C \int_0^\tau q(\tau - \eta) Z(z, \eta) S(\xi', \eta / \lambda, q_1) S(\eta', \eta / \lambda, q_2) d\eta,$$

$$\text{де } \xi' = x \cos \alpha - b \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\cos \gamma} y, \quad \eta' = x \sin \alpha + b \frac{\cos(\alpha + \gamma)}{\cos \gamma} y.$$

Використовуючи наведені в [2] вирази для функції Z , знаходимо температуру в пластині товщиною $2h$. Розглянемо випадок тонких пластинок та малої тепловіддачі. Тоді функція Z може бути визначена наближено у простому вигляді [1,5]

$$Z = \beta \exp(-\beta \tau), \quad \text{де } \beta = \alpha / (\gamma_{33} h).$$

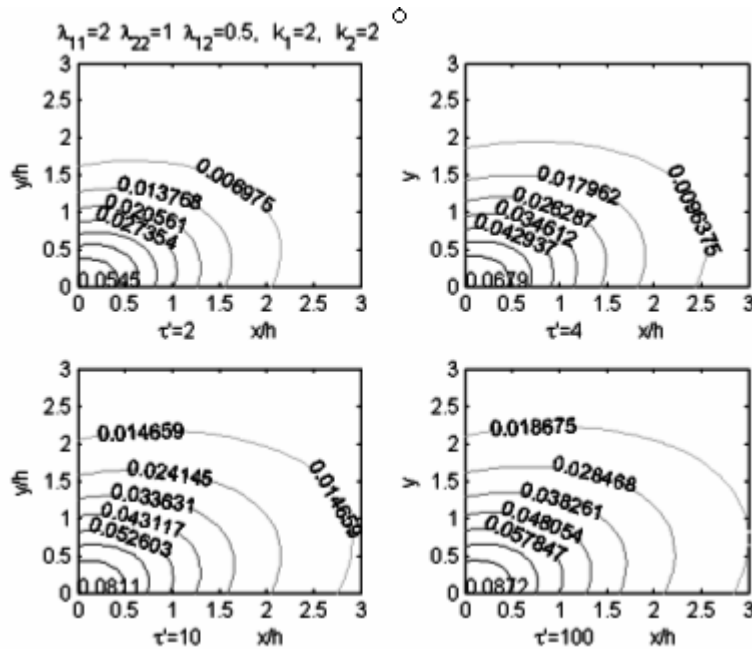


Рис.1.а-г. Лінії рівня температури в процесі нагріву пластинки нормально-круговим джерелом тепла

Для дослідження впливу анізотропії проведені розрахунки температури в тонкій пластинці при $k_1 h^2 = k_2 h^2 = 2$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_{12} = 0.5$, $Bi_3 = 0.1$ де $Bi_3 = \frac{\alpha h}{\gamma_{33}}$. Результати розрахунків ліній рівня безрозмірної температури T/C при значеннях часової координати $\tau' = \frac{c\rho}{h^2 \gamma_{33}} t$ у віднесених до h координатах наведено на рис. 1.а–г.

Із наведених графіків видно, що лінії рівня температури для анізотропної пластинки істотно відрізняються від кругових, які виникають в ізотропних пластинках і є несиметричними відносно осей координат.

Отже, у роботі показано, що розв'язок широкого кола тривимірних задач нестационарної теплопровідності для анізотропних тіл циліндричної форми зводиться до розв'язування одновимірної та двовимірної задач теплопровідності. Ці розв'язки можуть бути знайдені на основі розгляду відомих задач теплопровідності для стрижнів або тонких ізотропних пластинок без тепловіддачі.

Список літератури: 1. Болотин В.В. // Уравнения нестационарных температурных полей в тонких оболочках при наличии источников тепла. Изв. АН СССР, ПММ. 1960. т.24. №2. С.361–363. 2. Карлслю Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 487 с. 3. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 599 с. 4. Максимович В.Н., Пляцко Г.В. // К задаче определения нестационарных температурных полей в пластинах и оболочках // В кн.: Мат. методы в термомеханике, Киев: Наук. думка, 1978. С.100–109. 5. Подстригач Я.С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – Киев: Наук. думка, 1972. – 308 с. 6. Чибиряков В.К. // Об уравнениях теплопроводности для пластин при конвективном теплообмене с боковых поверхностей. В кн. Соппротивление материалов и теория сооружений, Киев: Будивельник. 1971. Т.15. С.60–64.

Сдано в редакцию 19.04.05

Рекомендовано д.т.н., проф. Бутенко В.И.

ЗУБОТОЧЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС С ЭВОЛЬВЕНТНЫМ ПРОФИЛЕМ

Бочарова И.А., Витренко В.А., Воронцов Б.С., Кириченко И.А., Пилипенко В.Н.
(ВНУ им.В.Даля, Луганск, Украина)

The article has investigated the method of teeth cutting of cylinder gear-wheels having involute profile with the help of synthesized quazihyperbola rolling cutters.

Нарезание цилиндрических зубчатых колес с эвольвентным профилем ведут в основном методом обкатки при помощи червячных фрез и долбяков.

После переточек названных инструментов уменьшается их диаметр, что приводит к изменению производящих колес [1], в результате возникают систематические погрешности профилей режущих кромок и обрабатываемых ими зубьев цилиндрических колес. Кроме того, с увеличением переднего и заднего углов, высоты профиля и угла подъема эти погрешности существенно возрастают.

Перспективным методом нарезания зубчатых колес и шлицевых валов различного профиля является зуботочение. Этот метод основан на обкатывании двух зубчатых