

В. П. Радин, А. В. Щугорев, В. Н. Щугорев, О. В. Новикова
НИУ «МЭИ» Москва, Россия
E-mail: Shchugorev.VN@gmail.com

УСТОЙЧИВОСТЬ СВОБОДНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ НЕКОНСЕРВАТИВНОМ НАГРУЖЕНИИ

При расчете на устойчивость механических систем, находящихся в условиях сложного нагружения, возникает задача об определении границ области устойчивости в пространстве нагрузок. Если среди внешних сил имеются неконсервативные нагрузки, то конфигурация этих границ зачастую непредсказуема с точки зрения эйлеровой теории устойчивости, применимой для потенциальных сил.

Ключевые слова: устойчивость, неконсервативное нагружение, следящая сила, формы собственных колебаний стержня

V. P. Radin, A.V. Schugorev, O.V. Novikova

STABILITY OF FREE BAR AT A UNCONSERVATIVE LOADING

At a calculation on stability of the mechanical systems being in the conditions of difficult loading, there is a task about determination of borders of area of stability in space of loading. If among external forces there are the unconservative loading, then configuration of these borders frequently unforeseeable from the point of view of эйлеровой theory of stability applicable for potential forces.

Keywords: stability, unconservative loading, tracker force, forms of eigentones of bar

Введение

Факт непредсказуемости границ области устойчивости с точки зрения эйлеровой теории связан с особенностями неконсервативных задач теории упругой устойчивости [1]. Здесь достаточно упомянуть парадоксы, обнаруженные в разное время: парадокс Николаи [2], парадокс Циглера [3]. И если, например, рассмотреть границу области устойчивости для расширенной задачи Бека – консольный стержень при действии сжимающих следящей и потенциальных сил [4], то можно отметить следующее. Граница состоит из границы флаттера и границы дивергенции, и в зависимости от соотношения между следящей и потенциальной силами потеря устойчивости происходит либо по типу флаттера (колебательным образом – бифуркация Андронова-Хопфа) либо по типу дивергенции (жесткая потеря устойчивости) с переходом в смежное состояние равновесия. Характерной особенностью этой границы является то, что при добавлении даже небольшой потенциальной силы к следящей снижает критическое значение последней, при котором будет наблюдаться флаттер. Это вполне ожидаемо. Но добавление следящей силы к потенциальной оказывает стабилизирующее действие и отодвигает границу дивергенции в сторону более высоких значений потенциальной силы. Рассмотрим аналогичные явления на примере устойчивости свободного стержня при действии постоянных по величине сил: одна из них постоянного направления, другая – следящая. При действии только следящей силы с использованием разложения решения уравнения возмущенного движения в степенные ряды эта задача была решена еще в шестидесятые годы В.И. Феодосьевым [5].

Пусть тонкий упругий стержень совершает прямолинейное равноускоренное движение с ускорением a под действием двух сил: следящей силы P и силы, имеющей постоянное направление вдоль траектории движения стержня, Q . Обе силы приложены

к одному торцу стержня (рис. 1). Будем исследовать устойчивость прямолинейной формы стержня. Распределенная нагрузка, действующая на стержень определяется как

$$p = \frac{P}{l}, \quad q = \frac{Q}{l}.$$

Уравнение динамического метода исследования устойчивости относительно отклонений от прямолинейной формы $w(x, t)$ в данном случае примет вид

$$EI \left(1 + b_i \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ [(p + q)(l - x)] \frac{\partial w}{\partial x} \right\} + b_e m \frac{\partial w}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + Q \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (x = 0), \\ EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0, \quad (x = l). \end{aligned} \quad (2)$$

В формулах (1) и (2) b_i, b_e – коэффициенты внутреннего и внешнего трения. Остальные обозначения – общепринятые.

Введем безразмерные параметры

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \tau = \omega_* t, \quad \omega_* = \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \alpha = \frac{Ql^2}{EI} = \frac{ql^3}{EI}, \quad \beta = \frac{Pl^2}{EI} = \frac{pl^3}{EI}, \quad \varepsilon_i = b_i \omega_*, \quad \varepsilon_e = \frac{b_e}{\omega_*}, \quad (3)$$

уберем из граничных условий (2) силу Q и с помощью δ – функции Дирака введем ее проекцию в уравнение (1). Тогда граничные условия (2) заменятся на однородные, а безразмерная форма уравнения возмущенного движения примет вид

$$\left(1 + \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + (\alpha + \beta) \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ [(1 - \xi)] \frac{\partial w}{\partial \xi} \right\} - \alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} \delta(0) + \varepsilon_e \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0. \quad (4)$$

Подразумевая в дальнейшем, применение метода разложения по формам собственных колебаний, решим задачу об определении частот и форм незакрепленного по концам стержня. Собственные формы можно определить по формуле

$$\varphi_k = S_1(\chi_k \xi) - \frac{S_2(\chi_k)}{S_3(\chi_k)} S_2(\chi_k \xi)$$

где χ_k – частотные коэффициенты, определяемые уравнением $1 - \text{ch} \chi \cdot \cos \chi = 0$, а $S_j(\chi_k \xi)$ – функции Крылова ($j = 1, 2, 3, 4$) [4]. На рис. 2 для иллюстрации представлены графики первых четырех форм собственных колебаний.

Исследование устойчивости плоской формы равновесия панели сводится к анализу устойчивости по Ляпунову тривиального решения уравнения (4). Применим для этого метод разложения по собственным формам [1]. Представляя $w(\xi, \tau)$ в виде ряда по формам собственных колебаний

$$w(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^n q_k(\tau) \varphi_k(\xi), \quad \text{или} \quad w(\xi, \tau) = \mathbf{q}^T(\tau) \boldsymbol{\varphi}(\xi),$$

где $q_k(\tau)$ – обобщенные координаты, n – число удерживаемых членов ряда, и применяя процедуру метода Бубнова-Галеркина, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат $q_k(\tau)$.

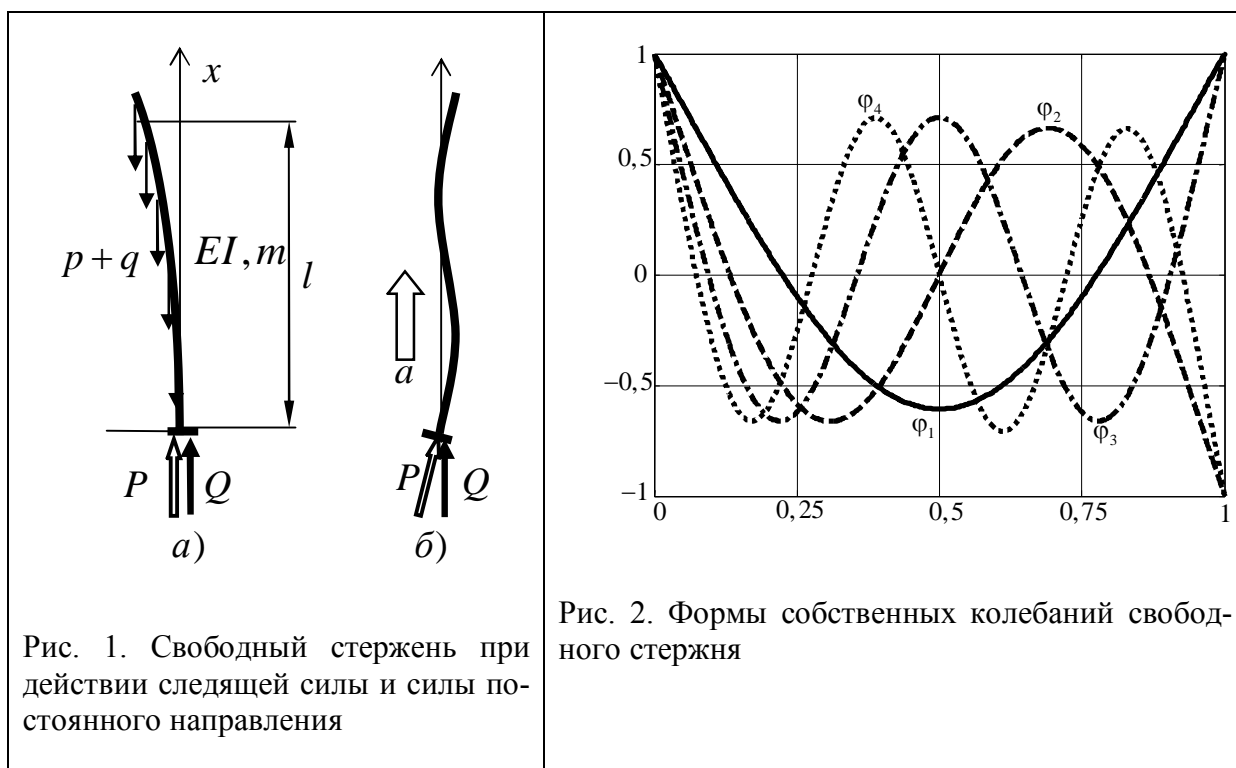


Рис. 1. Свободный стержень при действии следящей силы и силы постоянного направления

Рис. 2. Формы собственных колебаний свободного стержня

Матричная форма этих уравнений имеет вид

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + (\varepsilon_e \mathbf{A} + \varepsilon_i \mathbf{C})\dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{C} + (\alpha + \beta)\mathbf{D} - (\alpha + \beta)\mathbf{B} - \alpha\mathbf{B1}] \mathbf{q} = 0, \quad (5)$$

где матрицы \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} и \mathbf{D} определяются через интегралы от форм колебаний и их производных.

$$\mathbf{A} = \int_0^1 \boldsymbol{\varphi}(\xi) \boldsymbol{\varphi}^T(\xi) d\xi, \quad \mathbf{B} = \int_0^1 \boldsymbol{\varphi}'(\xi) \boldsymbol{\varphi}^T(\xi) d\xi, \quad \mathbf{C} = \int_0^1 \boldsymbol{\varphi}^{IV}(\xi) \boldsymbol{\varphi}^T(\xi) d\xi, \quad \mathbf{D} = \int_0^1 (1 - \xi) \boldsymbol{\varphi}''(\xi) \boldsymbol{\varphi}^T(\xi) d\xi,$$

а матрица $\mathbf{B1}$ определяется выражением $\mathbf{B1} = \boldsymbol{\varphi}'(0) \boldsymbol{\varphi}^T(0)$. Представляя решение уравнения (5) в виде $\mathbf{q}(\tau) = \mathbf{q}_0 \exp(\lambda\tau)$, где λ – характеристические показатели, для исследования устойчивости получим характеристический полином вида.

$$\mathbf{A}\lambda^2 + (\varepsilon_e \mathbf{A} + \varepsilon_i \mathbf{C})\lambda + \mathbf{C} + (\alpha + \beta)\mathbf{D} - (\alpha + \beta)\mathbf{B} - \alpha\mathbf{B1} = 0, \quad (6)$$

Характеристические показатели λ (в общем случае комплексные числа) полностью определяют поведение системы во времени в окрестности исследуемого на устойчивость положения равновесия. Очевидно, что положение равновесия будет асимптотически устойчивым, если действительные части всех характеристических показателей отрицательные, т.е. $\forall \operatorname{Re} \lambda < 0$. Другими словами все характеристические показатели находятся в левой полуплоскости. При изменении параметров системы и/или параметров нагрузки потеря устойчивости соответствует переходу хотя бы одного характеристического показателя в правую полуплоскость. Причем, если этот переход происходит через начало координат, то тип потери устойчивости при этом носит квазистатический характер и называется дивергенцией. Если же такой переход происходит через мнимую ось с отличной от нуля мнимой частью, то тип потери устойчивости носит колебательный

характер и называется флаттером. При этом мнимая часть характеристического показателя определяет частоту флаттера. Для определения положения границ области устойчивости применялся критерий Рауса-Гурвица. Если в разложении прогиба используется n членов разложения, то соответствующая матрица Гурвица будет размерностью $2n \times 2n$. Как показали вычисления, равенства нулю главного минора матрицы Гурвица порядка $2n - 1$, т.е. $\Delta_{2n-1} = 0$ определяет границу области флаттера на плоскости параметров нагружения α, β . Граница области дивергенции может быть определена из условия равенства нулю определителя матрицы Гурвица или, что то же самое, равенства нулю свободного члена характеристического полинома $b_0 = 0$.



Рис. 3. Границы области устойчивости для системы при отсутствии демпфирования

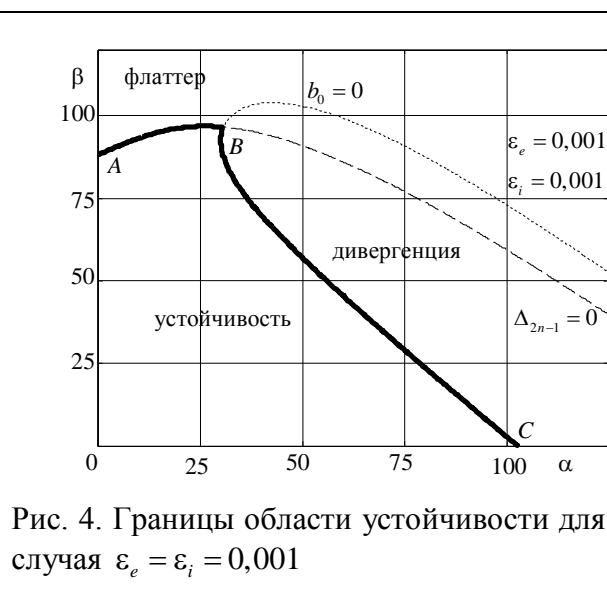


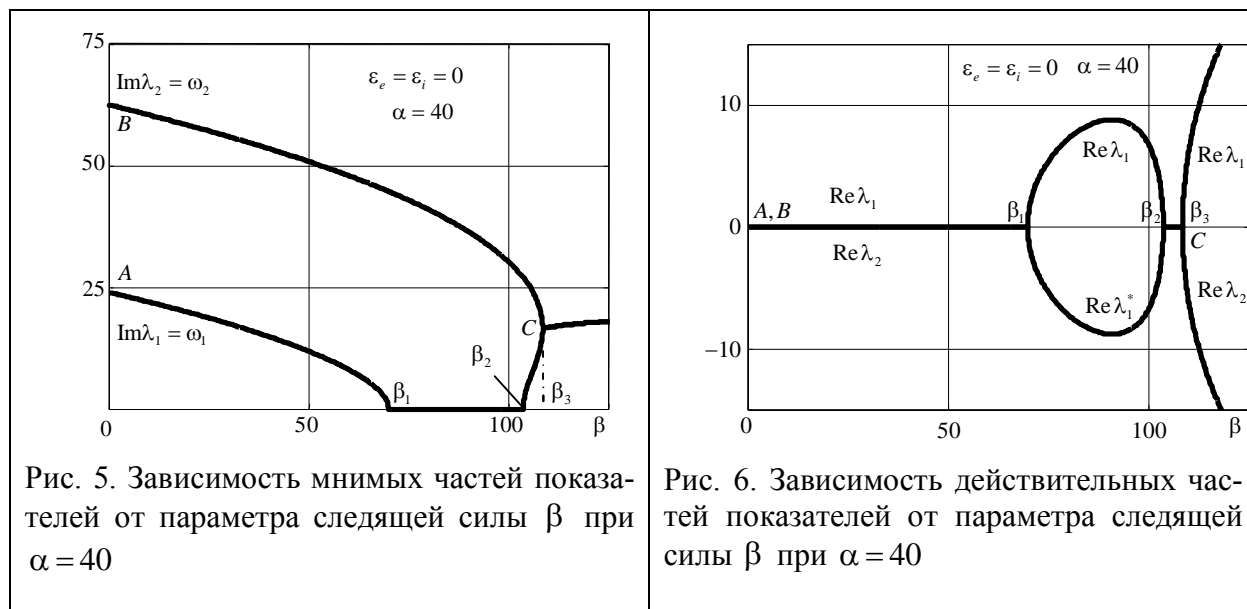
Рис. 4. Границы области устойчивости для случая $\epsilon_e = \epsilon_i = 0,001$

Результаты вычислений по определению положения границы области устойчивости на плоскости α, β представлены на рис. 3 и рис. 4. На рис. 3 граница области устойчивости соответствует системе без демпфирования, а при построении границы на рис. 4 принято для коэффициентов демпфирования принято $\epsilon_e = 0,01$ и $\epsilon_i = 0,01$.

Граница области устойчивости ABC состоит из границы флаттера AB и границы дивергенции BC . Данные рис. 3 для критического значения следящей силы $\beta_* = 109,7$ при $\alpha = 0$ подтверждают результаты вычислений в [5]. Дестабилизирующее влияние трения, в частности внутреннего трения, демонстрирует граница области устойчивости, представленная на рис. 4, где наблюдается заметное снижение критических значений следящей силы. Обращает на себя неоднозначность критических значений следящей силы при фиксированных значениях α . Рассмотрим поведение характеристических показателей, ответственных за устойчивость, при возрастании β при $\alpha = 40$ (прямая MN на рис. 3). Результаты вычислений мнимых и действительных частей λ_1 и λ_2 представлены на рис. 5 и рис. 6.

При первом пересечении границы области устойчивости, точнее границы дивергенции, в точке 1 при мнимая часть первого характеристического показателя λ_1 обра-

щается в ноль. При этом λ_1 сливается со своим комплексно сопряженным значением λ_1^* и один из указанных показателей переходит в правую полуплоскость, обуславливая



тем самым потерю устойчивости по типу дивергенция. В точке 2 λ_1 возвращается на мнимую ось и при дальнейшем некотором увеличении параметра β система будет устойчива по Ляпунову вплоть до точки 3, где λ_1 λ_2 сливаются с равными мнимыми частями, отличными от нуля и определяющими частоту флаттера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – 339 с.
2. Николаи Е. Л. Труды по механике. – М.: Гостехиздат, 1955. – С. 357–406.
3. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. – М.: Мир, 1971. – 192 с.
4. Окопный Ю. А., Радин В. П., Чирков В. П. Колебания линейных систем. Учебное пособие. – М.: ИД «Спектр», – 2014. 432 с.
5. Феодосьев В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука. – 1973. – 400 с.
6. Радин В. П., Щугорев В. Н., Щугорев А. В., Зайкина Ж. В. Устойчивость трубопровода с упругой опорой. Материалы XXI международной научно-технической конференции “Машиностроение и техносфера XXI века”, – Севастополь 2014. – С 224–228.

Поступила в редколлегию 21.05.2016